



Analyse mathématique et numérique des modèles P_n pour la simulation de problèmes de transport de photons

Xavier Valentin

► To cite this version:

Xavier Valentin. Analyse mathématique et numérique des modèles P_n pour la simulation de problèmes de transport de photons. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris Saclay (COMUE), 2015. Français. NNT : 2015SACLC024 . tel-01288229

HAL Id: tel-01288229

<https://theses.hal.science/tel-01288229>

Submitted on 14 Mar 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH, ED 574)

Établissement d'inscription : Centrale-Supélec

Établissement d'accueil : CEA, DAM, DIF, F-91297 Arpajon, France

THÈSE DE DOCTORAT ÈS MATHÉMATIQUES

Spécialité : Mathématiques appliquées

Xavier VALENTIN

Analyse mathématique et numérique de modèles P_N pour la
simulation de problèmes de transport de photons

Date de soutenance : 17 décembre 2015

Après avis des rapporteurs : CHRISTOPHE BERTHON (Université de Nantes)
XAVIER BLANC (Université Paris Diderot)

<i>Jury de soutenance :</i>	CHRISTOPHE BERTHON	(Université de Nantes) Rapporteur
	XAVIER BLANC	(Université Paris Diderot) Rapporteur
	FRANÇOIS BOUCHUT	(Université Paris-Est) Examinateur
	BRUNO DESPRÉS	(Université Paris 6) Président du jury
	CÉDRIC ENAUX	(CEA, DAM, DIF) Co-encadrant de thèse
	PAULINE LAFITTE	(École CentraleSupélec) Directeur de thèse
	MOHAMMED LEMOU	(Université de Rennes) Examinateur

MATHEMATICAL AND NUMERICAL ANALYSIS OF SPHERICAL HARMONICS MODELS FOR PHOTON TRANSPORT

Resume

Computational costs for direct numerical simulations of photon transport problems are very high in terms of CPU time and memory. One way to tackle this issue is to develop reduced models that are cheaper to solve numerically. There exists a number of these models : moments models, discrete ordinates models (S_N), diffusion-like models... In this thesis, we focus on P_N models in which the transport operator is approached by means of a truncated development on the spherical harmonics basis. These models are arbitrary accurate in the angular dimension and are rotationally invariants (in multiple space dimensions). The latter point is fundamental when one wants to simulate inertial confinement fusion (ICF) experiments where the spherical symmetry plays an important part in the accuracy of the numerical solutions. We study the mathematical structure of the P_N models and construct a new numerical method in the special case of a one dimensional space dimension with spherical symmetry photon transport problems.

We first focus on a linear transport problem in the vacuum. Even in this simple case, it appears in the P_N equations geometrical source terms that are stiff in the neighborhood of $r = 0$ and thus hard to discretise. Existing numerical methods are not satisfactory for multiple reasons : (1) unaccuracy in the neighborhood of $r = 0$ ("flux-dip"), (2) do not capture steady states (well-balanced scheme), (3) no stability proof. Following recent works, we develop a new well-balanced scheme for which we show the L^2 stability. We then extend the scheme for photon transport problems within a non moving media, the linear Boltzmann equation, and interest ourselves on its behavior in the diffusion limit (asymptotic-preserving property).

In a second part, we consider radiation hydrodynamics problems. Since modelisation of these problems is still under discussion in the literature, we compare a set of existing models by means of mathematical analysis and establish a hierarchy. For each model, we focus on the following mathematical properties : (1) energy and impulsion conservation, (2) accuracy of the comobile effects, (3) existence of a mathematical entropy and (4) behavior in the diffusion limit. Our study reduces to "laboratory frame" models and we are still interested in the P_N approximation of the transport operator. We identify defects in entropy structure of existing models and propose an entropy correction which leads to P_N -based radiation hydrodynamics models which satisfy all the properties listed above.

ANALYSE MATHÉMATIQUE ET NUMÉRIQUE DE MODÈLES P_N POUR LA SIMULATION DE PROBLÈMES DE TRANSPORT DE PHOTONS

Résumé

La résolution numérique directe des problèmes de transport de photons en interaction avec un milieu matériel est très coûteuse en mémoire et temps CPU. Pour pallier ce problème, une approche consiste à construire des modèles réduits dont la résolution est moins coûteuse. La littérature abonde de ce genre de modèles : modèles aux moments (M_1, P_N) , modèles aux ordonnées discrètes (S_N) , modèles de diffusion... Dans cette thèse, nous nous intéressons aux modèles P_N dans lesquels l'opérateur de transport est approché par projections sur une base tronquée d'harmoniques sphériques. Ces modèles, arbitrairement précis sur la dimension angulaire, ont l'avantage d'être invariants par rotation (en plusieurs dimensions d'espace). Ce dernier point est primordial pour la simulation d'expériences de fusion par confinement inertiel (FCI) où la symétrie sphérique joue un rôle important dans la précision des résultats. Nous étudions donc dans cette thèse la structure mathématique des modèles P_N ainsi que leur discrétisation dans le cas d'une géométrie $1D$ sphérique.

Nous commençons par le cas du transport linéaire dans le vide. Même dans ce cas simple, les équations du modèle P_N contiennent des termes sources d'origine géométrique dont la discrétisation s'avère délicate. Jusqu'à présent, les différents schémas utilisés étaient insatisfaisants pour les raisons suivantes : (1) mauvais comportement au voisinage de $r = 0$ (phénomène de "flux-dip"), (2) non préservation des équilibres stationnaires, (3) pas de preuve formelle de stabilité. À la lumière de récents travaux, nous proposons une nouvelle discrétisation qui capture exactement les états d'équilibre. Nous démontrons en particulier la stabilité en norme L^2 du schéma. Nous étendons par la suite ce schéma au cas du transport de photons dans un milieu matériel figé et nous nous intéressons au comportement du schéma en limite diffusion (propriété "asymptotic-preserving").

Dans un second temps, nous nous intéressons au couplage entre rayonnement et hydrodynamique. Devant l'absence de consensus sur les modèles "transport" d'hydrodynamique radiative issus de la littérature, nous établissons une étude comparative de ceux-ci basée sur leurs propriétés mathématiques. Nous nous intéressons particulièrement aux propriétés suivantes : (1) conservation de l'énergie et de l'impulsion, (2) précision des effets comobiles, (3) existence d'une entropie mathématique compatible et (4) restitution de la limite diffusion. Notre étude se réduit aux modèles dits "mixed-frame" et une attention particulière est toujours portée sur l'approximation " P_N " de l'opérateur de transport. Nous identifions des défauts (conservation ou entropie) sur des modèles existants et proposons une correction entropique conduisant à un modèle P_N satisfaisant toutes les propriétés mathématiques listées ci-dessus.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier ma directrice de thèse, Pauline Lafitte, et mon encadrant au CEA, Cédric Enaux, pour l'investissement dont ils ont fait preuve pendant ces trois ans de thèse. Je les remercie également pour leur cours respectifs en troisième année d'école qui m'ont réconcilié avec l'enseignement des mathématiques en cursus ingénieur et qui m'ont encouragé à poursuivre mes études dans la voie de la simulation numérique. Plus particulièrement, je remercie Cédric pour son encadrement au quotidien, sa pédagogie et pour m'avoir tout appris concernant les aspects concrets de la simulation numérique. Je remercie Pauline pour sa disponibilité, pour m'avoir transmis sa culture scientifique, voire philosophique, pour ses conseils toujours avisés et pour avoir pris en charge les aspects administratifs de ma thèse. Je les remercie également pour leur écoute, leur patience (et dieu sait qu'il en faut pour m'écouter) et leurs qualités humaines qui ont largement contribué au plaisir que j'ai eu à travailler à leur côté.

Je remercie ensuite tous les membres du jury de ma soutenance, Christophe Berthon, Xavier Blanc, François Bouchut, Bruno Després et Mohammed Lemou. En particulier, je remercie Christophe Berthon et Xavier Blanc pour avoir accepté de rapporter mon travail et Bruno Després pour avoir endossé le rôle de président du jury.

Je voudrais aussi remercier Hervé Jourden pour son accueil au sein de son laboratoire au CEA et pour ses « rapides historiques de l'hydrodynamique radiative » entre autres. Je remercie également Bruno Sheurer pour m'avoir accueilli dans son unité et pour ses conseils. Enfin, merci à tous les deux pour leurs travaux de relectures, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux et pour la confiance qu'il me porte pour l'après-thèse.

Je remercie tout le personnel administratif du CEA et de l'école CentraleSupélec : au CEA, Isabelle Visotto, Éliane Richard, Stéphanie Perrot, Brigitte Sadoule, et à l'école CentraleSupélec Catherine Lhopital, Emmanuelle Coplo et Suzanne Thuron. Pour les aspects logistiques à l'espace Teratec au CEA, je remercie aussi Thao Le et Denis Lubin.

Enfin, je remercie toute la fine équipe de doctorants et de stagiaires occasionnels du Teratec (pas la boîte de nuit mais le campus d'entreprises) au CEA sans qui ces trois années de thèse auraient été beaucoup moins drôle. Travailler à leurs côtés a été un réel plaisir au quotidien et une source d'enrichissement scientifique et culturel. Mais je tiens surtout à les remercier pour la bonne ambiance et pour tous ces moments un peu moins sérieux qui ont souvent égayé mes journées. C'est avec une grande nostalgie et une larmichette au coin de l'œil que je m'en vais vers d'autres horizons et que je cède le trône de l'open-space ; mais attention, je ne serai jamais très loin... Merci donc,

dans le désordre, à Martin Pécheur, au Petit Stagiaire, à Thomas, Antoine, DJ Pad, Emmanuelle (spécimen rare de chromosomes XX), Hugo T. et B., Consalfche, Julien, Daking, Hoby et Rémy Baby, Elyès, aux travailleurs de l'extrême Christelle (spécimen rare de chromosomes XX), Tony et Guillaume et aux anciens Bertrand, Alexandre, Jean-Yves, Jean-Baptiste, Sébastien.

Merci à Nicolas et Guillaume pour leur présence à ma soutenance.

« La parfaite raison fuit toute extrémité,
Et veut que l'on soit sage avec sobriété. »

Molière, *Le Misanthrope*, I, 1.

« Que dites-vous?... C'est inutile?... Je le sais !
Mais on ne se bat pas dans l'espoir d'un succès !
Non ! non, c'est bien plus beau lorsque c'est inutile ! »

Edmond Rostand, *Cyrano de Bergerac*, V, 6.

Table des matières

Introduction	8
1 Généralités sur la modélisation des problèmes de transfert radiatif	13
1.1 Description du rayonnement	13
1.2 Modélisation des interactions rayonnement / matière	15
1.3 Équations du transfert radiatif	17
1.4 Modèle P_N pour le transfert radiatif gris 1D plan	19
2 Analyse mathématique et numérique des modèles P_N pour l'équation de transport de photons dans un milieu matériel figé en géométrie 1D sphérique	23
2.1 Analyse mathématique de l'équation de transport	24
2.2 Construction des modèles P_N	28
2.3 Analyse mathématique des modèles P_N	32
2.4 Analyse du problème stationnaire	38
2.5 Discrétisation des modèles P_N et analyse numérique	41
2.6 Approximations des états stationnaires	49
2.7 Résultats numériques	53
2.8 Modèle de transfert radiatif spectral	69
2.9 Modèle multigroupe	69
2.10 Modèle P_N multigroupe	70
2.11 Discrétisation	71
3 Analyse mathématique et hiérarchie de modèles d'hydrodynamique radiative	74
3.1 Transformations de Lorentz pour le rayonnement	76
3.2 Modèles classiques	83
3.2.1 Équations d'Euler classiques	83
3.2.2 Modèle de transport spectral	84
3.2.3 Modèle de transport gris	88
3.2.4 Modèles VEF gris	92
3.2.5 Modèle P_N gris	96
3.3 Modèles relativistes	102

3.3.1	Équations d'Euler relativistes	102
3.3.2	Modèle de transport spectral	103
3.3.3	Modèle de transport gris	105
3.3.4	Limites de diffusion grise	107
3.3.5	Modèle P_1 gris	109
3.3.6	Modèle P_N gris	112
Conclusion		120

Introduction

L'étude effectuée dans cette thèse concerne l'analyse mathématique et numérique des modèles P_N pour la simulation de problèmes de transport de photons et d'hydrodynamique radiative. Plus précisément, on s'intéresse dans ces problèmes à l'évolution spatio-temporelle d'une population de photons en interaction avec le milieu matériel traversé. La modélisation de ces problèmes donne lieu à des systèmes d'équations aux dérivées partielles extrêmement complexes à résoudre aussi bien analytiquement que numériquement. Cette complexité est notamment issue du nombre de variables et du nombre d'équations intervenant dans les systèmes ainsi que de la structure même de ceux-ci (couplages, non linéarités, termes intégral-différentiels). Les infrastructures informatiques actuelles ne permettent pas d'obtenir des solutions suffisamment précises via des résolutions numériques directes. On a alors recours à des modèles approchés qui eux, sont plus simples à résoudre. Les modèles P_N constituent une famille, parmi d'autres, de tels modèles approchés. Dans cette thèse, nous étudions ces modèles sous l'angle de l'analyse mathématique et proposons des méthodes numériques efficaces pour leur résolution.

Avant d'entrer dans les détails mathématiques, nous nous intéressons tout d'abord au contexte général de cette thèse. Celle-ci s'inscrit dans le cadre de la simulation numérique d'expériences de fusion par confinement inertiel (FCI). Les expériences de FCI ont pour objectif d'initier la fusion nucléaire au sein d'un mélange de deux isotopes de l'hydrogène (deutérium et tritium, abrégé DT) au moyen de faisceaux lasers. Cette fusion est obtenue en chauffant et en comprimant de manière extrême le combustible emprisonné dans une microcapsule de forme sphérique appelée cible. On distingue deux modes de dépôt d'énergie par les lasers : l'attaque directe et indirecte. Dans l'attaque directe, la cible est directement soumise aux faisceaux lasers. Dans l'attaque indirecte, les faisceaux lasers chauffent tout d'abord un conteneur cylindrique entourant la cible qui transmet alors son énergie à cette dernière sous forme de rayonnements X. Quel que soit le mode de dépôt d'énergie choisi, la compression du DT au centre de la cible se fait par conservation de l'impulsion (effet *fusée*). Si les conditions thermodynamiques sont suffisantes, une réaction de fusion apparaît. On appelle alors conditions d'ignition les conditions requises pour que cette première réaction de fusion entraîne une fusion auto-entretenu. Un des points capitaux à l'optimisation du rendement énergétique des expériences de la FCI est la réduction des instabilités hydrodynamiques apparaissant au sein du dispositif. Ces instabilités sont notamment issues de la non uniformité du dépôt d'énergie effectué par les lasers sur la cible. Plusieurs dispositifs de FCI existent dans le monde. Parmi eux,

on distingue le NIF (National Ignition Facility) aux États-Unis et le LMJ (Laser Mégajoule) en France. Ces dispositifs permettent d'obtenir des résultats expérimentaux afin d'éprouver les méthodes numériques simulant la FCI. Ces méthodes numériques constituent un grand challenge puisqu'elles doivent coupler plusieurs modèles physiques pour simuler correctement tous les phénomènes intervenant dans l'expérience : interactions laser-plasma, hydrodynamique radiative, plasmas, modèles multifluide... Dans le cadre de cette thèse, on s'intéresse à la simulation numérique de problèmes d'hydrodynamique radiative. On s'intéresse également aux problèmes, plus simples, de transfert radiatif, où la matière est supposée figée. Un intérêt particulier est mis sur le développement de méthodes numériques robustes qui préservent la symétrie sphérique, qui, comme nous l'avons vu, est capitale dans les expériences de FCI.

On introduit à présent de manière succincte le cadre mathématique des problèmes étudiés dans cette thèse. Les problèmes de transport de photons sont largement étudiés et sont décrits en détails dans [MWM99], [Cha60] ou encore [Cas04]. L'évolution temporelle d'une population de photons se modélise avec une équation cinétique dont la forme générale s'écrit :

$$\frac{1}{c}\partial_t u + \omega \cdot \nabla u = S, \quad (1)$$

avec $u = u(t, x, \omega, \nu)$ est la fonction inconnue symbolisant l'intensité radiative du rayonnement (une définition rigoureuse sera donnée par la suite). Les quantités $t \in [0, +\infty[$, $x \in \mathbb{R}^3$, $\omega \in \mathbb{S}^2$ et $\nu \in [0, +\infty[$ désignent respectivement les variables de temps, d'espace, de direction et de fréquence. On note d la dimension spatiale et \mathbb{S}^2 la sphère unité de \mathbb{R}^3 . L'opérateur S représente les interactions des photons avec le milieu traversé. L'intensité u est une fonction de 7 variables : temps (1), espace (3), direction (2) et fréquence (1). En transfert radiatif, l'opérateur S prend la forme générale suivante :

$$S = -\sigma_t u + \sigma_a B(\nu, T) + \sigma_s \int_{\mathbb{S}^2} u \frac{d\omega'}{4\pi}, \quad (2)$$

où $\sigma_t = \sigma_s + \sigma_a$, σ_a et σ_s désignent respectivement les opacités totale, d'absorption et de scattering du milieu et sont des données du problème. La fonction B correspond à la fonction de Planck et dépend de la fréquence ν et de la température de la matière T . L'opérateur de collision S dépend des quantités thermodynamiques propres du milieu. En conséquence, on doit fermer le modèle en ajoutant une ou plusieurs équations modélisant l'évolution dynamique et thermodynamique de la matière. Lorsque la matière est supposée au repos (c'est-à-dire à vitesse nulle), cette équation supplémentaire s'écrit :

$$\partial_t \epsilon = -S_E = - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^2} S d\omega d\nu,$$

où $\epsilon = \rho c_v T$ avec c_v la capacité thermique massique et ρ la densité volumique du milieu. En sommant cette dernière équation et le moment angulaire d'ordre 0 de l'équation (1), on obtient alors une loi de conservation sur l'énergie totale du système :

$$\partial_t(\epsilon + E) + \nabla \cdot F = 0,$$

avec $E = (1/c) \int_{\mathbb{S}^2} u d\omega$ et $F = \int_{\mathbb{S}^2} u \omega d\omega$. En hydrodynamique radiative, la matière n'est plus supposée au repos et l'équation (1) est couplée aux équations d'hydrodynamique, par exemple les équations d'Euler :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \nabla(\rho v \otimes v + p) = -S_P, \\ \partial_t(\rho e) + \nabla(\rho e v + p v) = -S_E, \end{cases}$$

où ρ est la masse volumique du fluide, v sa vitesse, p sa pression et $e = \epsilon + v^2/2$ son énergie spécifique totale (interne plus cinétique). Le terme source S_P correspond aux échanges d'impulsion entre le rayonnement et la matière :

$$S_P = \frac{1}{c} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^2} S \omega d\omega d\nu.$$

En sommant l'équation sur l'énergie du système d'Euler avec le moment angulaire d'ordre 0 de (1), on obtient une loi de conservation sur l'énergie totale du système :

$$\partial_t(\rho e + E) + \nabla \cdot (\rho e v + p v + F) = 0.$$

De même, en sommant l'équation sur l'impulsion du système d'Euler avec le moment angulaire d'ordre 1 de (1), on obtient une loi de conservation sur l'impulsion totale du système :

$$\partial_t(\rho v + F/c^2) + \nabla \cdot (\rho v \otimes v + P) = 0,$$

avec $P = (1/c) \int_{\mathbb{S}^2} u \omega \otimes \omega d\omega$. La forme de l'opérateur S est de telle sorte que le couplage entre le rayonnement et la matière est fortement non linéaire. La résolution du système complet par des simulations numériques directes est donc très difficile. Il est alors nécessaire de développer des modèles approchés plus simples à résoudre. De nombreuses méthodes existent et une brève hiérarchie de celles-ci a été établie dans [Bru02]. On distingue deux familles de méthodes : les méthodes probabilistes (Monte-Carlo), et les méthodes déterministes. Les méthodes Monte-Carlo sont aujourd'hui très utilisées car elles constituent des méthodes précises et facilement parallélisables. Leur défaut majeur réside dans le fait qu'elles génèrent du « bruit » d'origine stochastique ce qui perturbe la symétrie sphérique des phénomènes physiques apparaissant en FCI. Parmi les méthodes déterministes, plusieurs approches sont possibles ; les modèles basés sur des approximations type diffusion, la méthode des ordonnées discrètes (appelée aussi méthode S_N) et les modèles aux moments font partie des méthodes les plus utilisées. Nous décrivons ici ces méthodes en quelques mots. Le modèle dit « de diffusion », valable uniquement dans un certain régime, s'obtient en considérant le premier moment angulaire de l'équation (1) :

$$\partial_t E + \nabla \cdot F = S_E,$$

Dans le régime diffusion, dans lequel les phénomènes de collisions sont prépondérants devant les phénomènes de transport, la loi de Fick est vérifiée en première approximation

et on a : $F = -(c/3\sigma_t)\nabla E$. De la sorte, on obtient l'équation suivante :

$$\partial_t E - \nabla \cdot \left(\frac{c}{3\sigma_t} \nabla E \right) = S_E.$$

La densité d'énergie radiative vérifie alors une équation parabolique dont la résolution numérique est beaucoup plus abordable que celle de (1). Néanmoins, l'approximation effectuée ici n'est valable que dans un régime bien particulier (régime diffusion) et s'avère peu précise dans les autres régimes (régime transport par exemple). Pour pallier ce défaut, des corrections mineures ont été apportées à ce modèle ; par exemple les modèles basés sur la théorie de la diffusion à flux limité. Néanmoins, ces modèles ne garantissent pas une précision suffisante dans tous les régimes possibles. La méthode des ordonnées discrètes, elle, ne présuppose pas de se placer dans un régime particulier. Cette méthode, initialement introduite dans [Cha60], reste la plus utilisée et étudiée parmi les méthodes déterministes. L'idée générale consiste à supposer la forme suivante pour l'intensité radiative u :

$$u(t, x, \omega, \nu) = \sum_{k=1}^N u_k(t, x, \omega_k, \nu) \delta(\omega - \omega_k), \quad (3)$$

où $(\omega_k)_{1 \leq k \leq N}$ sont N directions particulières et avec δ la distribution de Dirac. De la sorte, l'équation (1) devient un système de N équations de la forme :

$$\frac{1}{c} \partial_t u_k + \omega_k \cdot \nabla u_k = S_k.$$

Les termes intégraux dans les termes sources sont alors approchés par des quadratures. Cette méthode rencontre un large succès de par sa simplicité d'implémentation et d'optimisation. Elle souffre cependant d'un défaut majeur bien connu, les « effets de raies », qui apparaissent lorsque l'on se place en dimension d'espace supérieure à 1. Dans le cadre de la simulation d'expérience de FCI où la symétrie sphérique joue un rôle prépondérant, ce défaut nous contraint à rechercher des méthodes plus adaptées. Les modèles P_N sont, eux, une forme particulière de modèles aux moments. Ceux-ci se basent sur une décomposition de l'intensité radiative u sur une base tronquée de fonctions d'harmoniques sphériques. L'avantage des modèles P_N réside dans le fait qu'ils sont arbitrairement précis en angle et qu'ils donnent lieu à des systèmes linéaires. De plus, ils n'introduisent pas de perturbation à la symétrie sphérique. C'est donc sur ces modèles que se porte notre étude dans le cadre de cette thèse.

Dans cette thèse, on met donc l'accent sur la discrétisation des modèles P_N en géométrie 1D sphérique. La littérature à propos des modèles P_N est peu fournie ; lorsque l'on se place en géométrie 1D sphérique les résultats sont rares ([Mar47], [RW67], [Deb67]). De manière générale, le modèle P_N s'écrit sous la forme d'un système de lois de bilan de taille de $N + 1$ de la forme :

$$\frac{1}{c} \partial_t U + A \partial_r U + \frac{1}{r} G U = -\sigma_t U + \sigma_s J U + Q.$$

On distingue dans ce système un terme source formé de deux contributions. Le terme $(1/r)GU$ correspond aux effets géométriques. Le terme $-\sigma_t U + \sigma_s J U + Q$ correspond

aux interactions entre le rayonnement et la matière. Ces deux termes sources sont potentiellement raides : le terme géométrique devient raide au voisinage de $r = 0$ et le terme physique est raide lorsque σ devient grand, ce qui est fréquent dans les applications. Il faut donc être capable de construire une discrétisation de façon à être précis même dans les régimes où ces termes sources deviennent raides. On parle alors de schéma *asymptotic preserving* lorsque l'erreur de consistance de la discrétisation est consistante avec le développement asymptotique à l'ordre 1 de l'équation dans la limite considérée. La discrétisation des systèmes hyperboliques avec terme source raide est un problème qui a été très étudié récemment ([JL96], [GT02]). Ces schémas sont appelés schémas préservant l'asymptotique. De récents travaux ont montré que, dans certains cas, il suffit de construire un schéma bien équilibré (abrégié WB pour « well-balanced »), *i.e.* qui capture exactement les solutions stationnaires, pour obtenir un schéma préservant l'asymptotique (abrégié schéma AP pour « asymptotic preserving »). C'est l'approche que nous avons retenue dans cette thèse : construire un schéma WB pour le système étudié.

Le premier chapitre de cette thèse est dédié à quelques rappels de modélisation à propos des problèmes de transport de photons. On commence par définir les grandeurs décrivant une population de photons se déplaçant dans l'espace. On introduit ensuite les différents types d'interactions que peuvent avoir ces photons avec le milieu traversé et on définit des notations adaptées. On finit par dériver l'équation de transfert modélisant l'évolution temporelle d'une population de photons en interaction avec le milieu traversé.

Dans le deuxième chapitre, on rappelle les propriétés satisfaites par les solutions de l'équation de transport linéaire en géométrie $1D$ sphérique. Puis, on construit le modèle P_N associé et on procède à son analyse mathématique. En particulier, on s'intéresse aux propriétés conservées par passage de l'équation de transport au modèle P_N . On étudie ensuite les états stationnaires du modèle P_N avant de construire un schéma bien équilibré pour le système étudié. Enfin, on procède à l'analyse numérique du schéma en regardant les propriétés de conservation, le caractère WB, le caractère AP et la stabilité. On complète notre étude par quelques résultats numériques illustrant les propriétés précédentes et on compare les résultats obtenus avec des simulations issues de la littérature. On s'intéresse enfin aux équations du transfert radiatif, c'est-à-dire à la prise en compte du couplage non linéaire à la matière et de la dimension fréquentielle. Une extension multigroupe à trois températures (ions, électrons, rayonnement) du schéma est proposée.

Le troisième chapitre est dédié à l'étude mathématique des modèles d'hydrodynamique radiative. Partant du constat qu'il n'existe pas de consensus dans la littérature sur le choix du modèle à discrétiser, on focalise notre étude au cas d'une géométrie $1D$ plane. On dresse ensuite une hiérarchie non exhaustive de modèles dits « mixed-frame ». On compare les modèles suivant les propriétés qu'ils satisfont : conservation de l'énergie et de l'impulsion, ordre de précision en v/c des effets comobiles, précision angulaire, comportement en limite diffusion et existence d'une structure entropique. On identifie des défauts sur des modèles existants (choix entre conservation et entropie) et on propose de nouveaux modèles basés sur l'approximation P_N . Ces nouveaux modèles possèdent toutes les propriétés listées plus haut.

Chapitre 1

Généralités sur la modélisation des problèmes de transfert radiatif

Dans ce chapitre, on rappelle quelques éléments de modélisation des problèmes de transfert radiatif. On présente tout d'abord le formalisme mathématique utilisé pour décrire un rayonnement lumineux. On s'intéresse ensuite à la modélisation des interactions entre un rayonnement et un milieu matériel au repos, *i.e.* à vitesse nulle. Puis, à l'aide d'un bilan d'énergie, on dérive les équations du transfert radiatif. Celles-ci forment un système fermé de deux équations régissant la distribution des photons et la température de la matière. Dans un cas simplifié, on présente ensuite une famille de modèles, appelés modèles P_N , basés sur une décomposition en harmoniques sphériques de la distribution de photons et approchant les équations du transfert radiatif dans la limite $N \rightarrow \infty$. Enfin, on s'intéresse aux transformations de Lorentz pour le rayonnement afin de prendre en compte les effets d'entraînements apparaissant dans les interactions rayonnement/matière lorsque la matière n'est pas au repos.

Dans tout ce chapitre, la modélisation adoptée est limitée au cadre suivant, défini dans [RSUR13] : (1) on suppose que la densité de photons est suffisamment grande de telle sorte qu'il soit possible de calculer des moyennes sans que l'erreur stochastique soit trop élevée, (2) les effets d'interférence sont négligés, *i.e.* les photons sont incohérents, (3) on néglige les phénomènes de diffraction et de réflexion des photons, (4) on suppose que la lumière n'est pas polarisée, (5) les photons se déplacent à la vitesse c de la lumière dans le vide quel que soit le milieu matériel traversé.

On adopte en outre les conventions mathématiques suivantes. La variable de temps est notée $t \in [0, +\infty[$ et la variable d'espace $x \in \mathbb{R}^d$, où $d = 1, 2, 3$ désigne la dimension d'espace. On note S^2 la sphère unité de \mathbb{R}^3 et $\omega \in S^2$ la variable angulaire. La variable de fréquence est notée $\nu \in]0, +\infty[$.

1.1 Description du rayonnement

Dans cette partie, on définit les quantités nécessaires pour décrire le rayonnement. Le chapitre 6 de [MWM99] introduit ces notions de manière précise. On présente dans cette

section un résumé succinct de ce chapitre. À l'échelle microscopique, le rayonnement est constitué d'une population de particules, les photons, se déplaçant en ligne droite à la vitesse de la lumière c .

Définition 1.1. Soit δN le nombre de photons contenus à l'instant t dans un volume dx autour d'un point x , se déplaçant à la vitesse c dans un angle solide $d\omega$ autour d'une direction ω et de fréquence comprise dans un intervalle $[\nu, \nu + d\nu]$. On définit la densité de photons ψ par l'égalité :

$$\delta N = \psi(x, t, \omega, \nu) d\omega d\nu dx. \quad (1.1)$$

Définition 1.2. Soit δE la quantité d'énergie transportée dans un intervalle de temps $[t, t + dt]$ à travers une surface dS autour d'un point x , par les photons se déplaçant à la vitesse c dans un angle solide $d\omega$ autour d'une direction ω et de fréquence comprise dans un intervalle $[\nu, \nu + d\nu]$. On a alors :

$$\delta E = ch\nu\psi(x, t, \omega, \nu) \langle \omega, dS \rangle d\omega d\nu dt, \quad (1.2)$$

où h désigne la constante de Planck. On définit alors l'intensité radiative I par l'égalité :

$$I(x, t, \omega, \nu) = ch\nu\psi(x, t, \omega, \nu). \quad (1.3)$$

L'intensité radiative fournit une description cinétique complète du rayonnement. Ses moments angulaires successifs possèdent quant à eux une signification physique bien particulière comme le montrent les définitions ci-dessous.

Définition 1.3. On définit la densité d'énergie radiative monochromatique E_ν telle que la quantité d'énergie contenue à l'instant t dans un volume dx autour d'un point x , par les photons de fréquence comprise dans un intervalle $[\nu, \nu + d\nu]$ soit égale à $E_\nu dx d\nu$. On a alors d'après (1.1) :

$$E_\nu(x, t, \nu) = \int_{\mathbb{S}^2} h\nu\psi(x, t, \omega, \nu) d\omega = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{S}^2} I(x, t, \omega, \nu) d\omega. \quad (1.4)$$

De même, on définit la densité d'énergie radiative totale E telle que la quantité d'énergie contenue à l'instant t dans volume dx autour d'un point x , par la totalité des photons soit égale à $E dx$. On a alors d'après (1.1) :

$$E(x, t) = \int_0^{+\infty} \oint_{4\pi} h\nu\psi(x, t, \omega, \nu) d\omega d\nu = \frac{1}{c} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^2} I(x, t, \omega, \nu) d\omega d\nu. \quad (1.5)$$

Définition 1.4. On définit le vecteur flux d'énergie radiative monochromatique F_ν tel que la quantité d'énergie transportée dans un intervalle de temps $[t, t + dt]$ à travers une surface dS autour d'un point x , par les photons de fréquence comprise dans un intervalle $[\nu, \nu + d\nu]$ soit égale à $\langle F_\nu, dS \rangle dt d\nu$. On a alors d'après (1.1) :

$$F_\nu(x, t, \nu) = \int_{\mathbb{S}^2} ch\nu\psi(x, t, \omega, \nu) \omega d\omega = \int_{\mathbb{S}^2} I(x, t, \omega, \nu) \omega d\omega. \quad (1.6)$$

De même, on définit le vecteur flux d'énergie radiative total F tel que la quantité d'énergie transportée dans un intervalle de temps $[t, t + dt[$ à travers une surface dS autour d'un point x , par la totalité des photons soit égale à $\langle F, dS \rangle dt$. On a alors d'après (1.1) :

$$F(x, t) = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^2} ch\nu\psi(x, t, \omega, \nu)\omega d\omega d\nu = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^2} I(x, t, \omega, \nu)\omega d\omega d\nu. \quad (1.7)$$

En outre, la quantité $(1/c^2)F$ représente la densité d'impulsion radiative portée par les photons.

Définition 1.5. On définit le tenseur de pression radiative monochromatique P_ν tel que la quantité d'impulsion transportée dans un intervalle de temps $[t, t + dt[$ à travers une surface dS autour d'un point x , par les photons de fréquence comprise dans un intervalle $[\nu, \nu + d\nu[$ soit égale à $P_\nu : dS dt d\nu$. On a alors d'après (1.1) :

$$P_\nu(x, t, \nu) = \int_{\mathbb{S}^2} h\nu\psi(x, t, \omega, \nu)\omega \otimes \omega d\omega = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{S}^2} I(x, t, \omega, \nu)\omega \otimes \omega d\omega. \quad (1.8)$$

On définit le tenseur de pression radiative total P tel que la quantité d'impulsion transportée dans un intervalle de temps $[t, t + dt[$ à travers une surface dS autour d'un point x , par la totalité des photons soit égale à $P : dS dt$. On a alors d'après (1.1) :

$$P(x, t) = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^2} h\nu\psi(x, t, \omega, \nu)\omega \otimes \omega d\omega d\nu = \frac{1}{c} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^2} I(x, t, \omega, \nu)\omega \otimes \omega d\omega d\nu. \quad (1.9)$$

1.2 Modélisation des interactions rayonnement / matière

Dans cette section, on étudie comment le rayonnement interagit avec la matière. Encore une fois, on propose un bref résumé du chapitre 6 de [MWM99] où ces notions sont introduites avec précision. On définit tout d'abord les quantités nécessaires pour décrire ces interactions dans le cadre général. Puis, on étudie plus particulièrement le cas où la matière est au repos, *i.e.* à vitesse nulle. Le cas où la matière est en mouvement sera étudié précisément dans la section 3.1.

Définition 1.6. Soit δE la quantité d'énergie absorbée dans un intervalle de temps $[t, t + dt[$, par un volume de matière de longueur $d\ell$, de section dS situé autour d'un point x , orienté perpendiculairement à un rayonnement se propageant dans un angle solide $d\omega$ autour d'une direction ω , dans une bande de fréquence $[\nu, \nu + d\nu[$. On définit le coefficient d'extinction $\chi = \chi(x, t, \omega, \nu)$ par l'égalité :

$$\delta E = \chi(x, t, \omega, \nu) I(x, t, \omega, \nu) d\ell dS d\omega d\nu dt. \quad (1.10)$$

Définition 1.7. Soit δE la quantité d'énergie émise dans un intervalle de temps $[t, t + dt[$, par un volume de matière de longueur $d\ell$, de section dS situé autour d'un point x , dans un angle solide $d\omega$ autour d'une direction ω , dans une bande de fréquence $[\nu, \nu + d\nu[$. On définit le coefficient d'émission $\eta = \eta(x, t, \omega, \nu)$ par l'égalité :

$$\delta E = \eta(x, t, \omega, \nu) d\ell dS d\omega d\nu dt. \quad (1.11)$$

Il est important de distinguer ici deux types différents d'interactions entre la matière et le rayonnement : l'émission/absorption et le scattering. Dans le premier cas, l'énergie du rayonnement est absorbée par la matière au profit de son énergie interne ; c'est l'absorption. L'émission est le processus inverse : l'énergie interne de la matière est extraite et convertie en énergie radiative. Le scattering est le phénomène dans lequel un photon incident de direction ω et de fréquence ν est absorbé et réémis instantanément par la matière avec une direction ω' et une fréquence ν' différentes. Le changement de direction et le décalage en fréquence sont déterminés par un noyau de scattering. Contrairement à l'émission/absorption, aucun transfert d'énergie n'a lieu entre le rayonnement et la matière lors du scattering d'un photon.

Définition 1.8. On définit, et on note $\chi_a = \chi_a(x, t, \omega, \nu)$ et $\eta_a = \eta_a(x, t, \omega, \nu)$, les coefficients d'extinction et d'émission associés au processus d'émission/absorption. De même, on définit, et on note $\chi_s = \chi_s(x, t, \omega, \nu)$ et $\eta_s = \eta_s(x, t, \omega, \nu)$, les coefficients d'extinction et d'émission associés au processus de scattering. On a alors les égalités :

$$\chi(x, t, \omega, \nu) = \chi_a(x, t, \omega, \nu) + \chi_s(x, t, \omega, \nu), \quad (1.12)$$

et

$$\eta(x, t, \omega, \nu) = \eta_a(x, t, \omega, \nu) + \eta_s(x, t, \omega, \nu). \quad (1.13)$$

On s'intéresse à présent aux expressions des coefficients d'extinction et d'émission dans le cas particulier où la matière est au repos (*i.e.* vitesse nulle) à l'équilibre thermodynamique local (ÉTL).

Propriété 1.1. Lorsque la matière est au repos à l'ÉTL, les coefficients matériels d'extinction χ , χ_a et χ_s sont isotropes (*i.e.* indépendants de la direction ω) et s'identifient aux opacités du matériau :

$$\chi_a = \sigma_a, \quad \chi_s = \sigma_s, \quad \chi = \sigma_t = \sigma_a + \sigma_s, \quad (1.14)$$

avec $\sigma_t = \sigma_t(x, t, \nu)$, $\sigma_a = \sigma_a(x, t, \nu)$ et $\sigma_s = \sigma_s(x, t, \nu)$ respectivement les opacités totale, d'absorption et de scattering de la matière. Les valeurs de ces dernières sont données soit par des formules analytiques, soit par des tables d'opacités empiriques ou fournies par des codes de physique atomique.

Propriété 1.2. Lorsque la matière est au repos à l'ÉTL, les coefficients d'émission η_a et η_s sont isotropes et donnés par les expressions suivantes :

$$\eta_a = \sigma_a B, \quad \eta_s = \sigma_s \langle I \rangle, \quad (1.15)$$

où on a noté $\langle . \rangle$ l'opérateur moyenne sur S^2 , $B = B(\nu, T)$ la fonction de Planck (ou planckienne) et $T = T(x, t)$ la température de la matière. La fonction de Planck représente l'intensité radiative du rayonnement émis spontanément par un corps noir à la température T et est définie par :

$$B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} (e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)^{-1}, \quad (1.16)$$

où h et k sont les constantes de Planck et de Boltzmann. On note, en outre, qu'on a effectué l'hypothèse d'un scattering isotrope et cohérent, c'est-à-dire que le photon incident ne subit pas de changement de fréquence et que sa direction de réémission est distribuée uniformément sur la sphère S^2 .

Remarque 1.1. *Les hypothèses d'équilibre thermodynamique local et du scattering isotrope cohérent sont implicitement supposées dans toute la suite du document.*

Propriété 1.3. Le rayonnement émis par un corps noir à la température T , dont l'intensité est donnée par la fonction de Planck, vérifie la loi de Stefan : la densité d'énergie rayonnée est proportionnelle à T^4 et vaut

$$\frac{1}{c} \int_0^{+\infty} \oint_{4\pi} B(\nu, T) d\omega d\nu = aT^4, \quad a = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3}. \quad (1.17)$$

La constante a est appelée constante radiative.

1.3 Équations du transfert radiatif

L'équation de transfert est l'équation qui régit l'évolution de l'intensité radiative I . La méthode de dérivation de cette équation est présentée dans [MWM99], §76. L'idée générale est d'effectuer un bilan d'énergie radiative dans un intervalle de temps $[t, t + dt[$, dans un volume de longueur $d\ell$, de section droite dS autour d'un point x , transportée dans un angle solide $d\omega$ autour d'une direction ω normale à dS , dans une bande de fréquence $[\nu, \nu + d\nu[$. Par conservation de l'énergie totale, la différence entre la quantité d'énergie sortant du volume en $x + dx$ à $t + dt$ et la quantité d'énergie rentrante en x à t est égale à la différence entre quantité d'énergie émise et quantité d'énergie absorbée par la matière dans le volume pendant l'intervalle de temps $[t, t + dt[$. Formellement, cela s'écrit à l'aide de (1.2), (1.10) et (1.11) :

$$\begin{aligned} & (I(x + dx, t + dt, \omega, \nu) - I(x, t, \omega, \nu)) dS d\omega d\nu dt \\ & = (\eta(x, t, \omega, \nu) - \chi(x, t, \omega, \nu) I(x, t, \omega, \nu)) d\ell dS d\omega d\nu dt. \end{aligned} \quad (1.18)$$

En divisant les deux membres par $d\ell dS d\omega d\nu dt$, il vient avec l'égalité $d\ell = c dt$:

$$\frac{1}{c} \partial_t I + \omega \cdot \nabla I = \eta - \chi I. \quad (1.19)$$

Cette dernière équation est la forme générale de l'équation de transfert. C'est une équation de transport avec terme source qui décrit, dans son membre de gauche, le transport d'énergie radiative au sein du domaine et, dans son membre de droite, les échanges énergétiques avec la matière. Telle qu'on l'a écrite, (1.19) est valable que la matière soit au repos ou non, puisqu'on n'a pas précisé les expressions des termes sources. Dans le cas où la matière est au repos, le terme source général $\eta - \chi I$ de (1.19) se réécrit à l'aide de

(1.14) et (1.15) :

$$\begin{aligned} \eta(x, t, \omega, \nu) - \chi(x, t, \omega, \nu)I(x, t, \omega, \nu) &= \sigma_a(x, t, \nu)[B(\nu, T(x, t)) - I(x, t, \omega, \nu)] \\ &+ \sigma_s(x, t, \nu) \left[\oint_{\mathbb{S}^2} I(x, t, \omega', \nu) \frac{d\omega'}{4\pi} - I(x, t, \omega, \nu) \right]. \end{aligned} \quad (1.20)$$

On voit que l'équation de transfert est couplée à la matière par l'intermédiaire des opacités σ_a , σ_s et de la température T . Les opacités sont données par des formules analytiques, ou des tables de valeurs, qui dépendent de la masse volumique et de la température de la matière. La seule équation (1.19) avec (1.20) ne définit pas un système fermé. Il est nécessaire d'ajouter une équation supplémentaire régissant la température de la matière dans le milieu. D'après le premier principe de la thermodynamique, on a l'équation suivante :

$$\partial_t \varepsilon = q, \quad q(x, t) = - \int_0^{+\infty} \oint_{4\pi} \sigma_a(x, t, \nu) [B(\nu, T(x, t)) - I(x, t, \omega, \nu)] d\omega d\nu, \quad (1.21)$$

où $\varepsilon = \varepsilon(x, t) = \rho c_v T$ est la densité d'énergie interne de la matière et q la quantité de chaleur (d'énergie) transmise par unité de temps du rayonnement à la matière. En outre, ρ et c_v sont connues et désignent respectivement la masse volumique et la capacité thermique spécifique de la matière. Les équations (1.19) (avec terme source (1.20)) et (1.21) sont appelées équations du transfert radiatif et forment le système fermé suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \partial_t I + \omega \cdot \nabla I = \eta - \chi I, \\ \partial_t (\rho c_v T) = q, \end{cases} \quad (1.22)$$

où $\eta - \chi I$ et q sont respectivement donnés par (1.20) et (1.21). En intégrant l'équation de transfert en fréquences et en approchant les opacités spectrales, *i.e.* dépendantes de la fréquence, par leur moyenne sur tout le spectre, on obtient le système suivant modélisant le transfert radiatif gris, *i.e.* moyenné en fréquence :

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \partial_t I + \omega \cdot \nabla I = \bar{\sigma}_a \left(\frac{ac}{4\pi} T^4 - I \right) + \bar{\sigma}_s (\langle I \rangle - I), \\ \partial_t (\rho c_v T) = -\bar{\sigma}_a c (aT^4 - 4\pi \langle I \rangle), \end{cases} \quad (1.23)$$

où $I = I(x, t, \omega)$ désigne ici l'intensité radiative intégrée en fréquences et où on a noté $\langle \cdot \rangle$ l'opérateur moyenne sur \mathbb{S}^2 de sorte qu'ici $\langle I \rangle$ désigne la moyenne de I sur toutes les directions ω . De plus, $\bar{\sigma}_a$ et $\bar{\sigma}_s$ représentent respectivement les moyennes en fréquences des opacités spectrales σ_a et σ_s .

On a vu précédemment que les moments angulaires de l'intensité radiative possèdent une interprétation physique particulière. Il en est de même pour les moments angulaires de l'équation de transfert que l'on présente ci-dessous. Les deux premiers moments, l'énergie et l'impulsion, intégrés en fréquence de (1.19) s'écrivent :

$$\partial_t E + \nabla \cdot F = \int_0^{+\infty} \oint_{\mathbb{S}^2} [\eta(\omega, \nu) - \chi(\omega, \nu)I(\omega, \nu)] d\omega d\nu, \quad (1.24)$$

$$\frac{1}{c^2} \partial_t F + \nabla \cdot P = \frac{1}{c} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^2} [\eta(\omega, \nu) - \chi(\omega, \nu) I(\omega, \nu)] \omega d\omega d\nu. \quad (1.25)$$

Ces deux équations sont respectivement des lois de bilan pour la densité d'énergie et la quantité de mouvement radiatives. En particulier, les termes sources représentent les échanges de ces grandeurs physiques entre la matière et le rayonnement. On introduit alors, identiquement à [Cas04], chapitre 6, les quantités suivantes.

Définition 1.9. On définit, et on note G^0 et g , les quantités d'énergie et d'impulsion transmises de la matière au rayonnement par unité de volume et de temps (à un facteur $1/c$ près). D'après (1.24) et (1.25), celles-ci s'expriment :

$$G^0(x, t) = \frac{1}{c} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^2} [\eta(x, t, \omega, \nu) - \chi(x, t, \omega, \nu) I(x, t, \omega, \nu)] d\omega d\nu, \quad (1.26)$$

$$g(x, t) = \frac{1}{c} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^2} [\eta(x, t, \omega, \nu) - \chi(x, t, \omega, \nu) I(x, t, \omega, \nu)] \omega d\omega d\nu. \quad (1.27)$$

Propriété 1.4. Dans le cas particulier où la matière est au repos, les expressions pour G^0 et g se réécrivent avec (1.14) et (1.15) :

$$G^0(x, t) = \frac{1}{c} \int_0^{+\infty} \sigma_a(x, t, \nu) [4\pi B(\nu, T(x, t)) - cE_\nu(x, t, \nu)] d\nu, \quad (1.28)$$

$$g(x, t) = -\frac{1}{c} \int_0^{+\infty} \sigma_t(x, t, \nu) F_\nu(x, t, \nu) d\nu. \quad (1.29)$$

Ces expressions se simplifient dans l'approximation grise, *i.e* moyennée en fréquence, pour devenir :

$$G^0(x, t) = \bar{\sigma}_a(x, t) [aT(x, t)^4 - E(x, t)], \quad (1.30)$$

$$g(x, t) = -\frac{1}{c} \bar{\sigma}_t(x, t) F(x, t), \quad (1.31)$$

où $\bar{\sigma}_a$ et $\bar{\sigma}_t$ désignent les moyennes d'opacités sur tout le spectre de fréquence.

1.4 Modèle P_N pour le transfert radiatif gris 1D plan

La méthode P_N est une méthode d'approximation de l'opérateur de transport basée sur la projection de celui-ci sur une base tronquée d'harmoniques sphériques. Cette méthode peut donc s'appliquer dès que le problème rencontré fait intervenir l'équation de transport (photonique, neutronique, transport de particules et bien d'autres) ; autrement dit, elle n'est pas propre au problème de transfert radiatif. Une présentation générale de la méthode est exposée dans [Bru00] et [Bru02]. L'application de la méthode P_N pour le transfert radiatif fait l'objet d'un projet prospectif mené au CEA depuis 2009, qui se décline sous la forme d'une succession de travaux de stages sur les sujets suivants :

- schémas P_N explicites et implicites « *Asymptotic Preserving* » pour le transfert radiatif en 1D plan,
- extensions de la méthode P_N aux cas 1D sphérique et 2D axisymétrique,
- adaptation de la méthode P_N à des architectures hybrides (CPU/GPU),
- extension de la méthode P_N au multigroupe,
- étude des schémas P_N d'ordres élevés.

Dans cette section, on rappelle brièvement la théorie mathématique et la dérivation du modèle P_N 1D plan pour les équations du transfert radiatif gris. Comme on se place en géométrie 1D plane, on note, dans cette section, $x \in \mathbb{R}$ la variable d'espace et $\mu \in [-1, 1]$ la variable de direction telle que $\mu = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x$, où \mathbf{e}_x est le vecteur unitaire orthogonal au plan invariant. Le système étudié, dont on veut écrire le modèle P_N associé, s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \partial_t I + \mu \partial_x I = \sigma_a(x, t) \left[\frac{ac}{4\pi} T^4(x, t) - I(x, t, \mu) \right] \\ \quad + \sigma_s(x, t) \left[\int_{-1}^1 I(x, t, \mu') \frac{d\mu'}{2} - I(x, t, \mu) \right], \\ \partial_t(\rho c_v T) = -4\pi \int_{-1}^1 \sigma_a(x, t) \left[\frac{ac}{4\pi} T^4(x, t) - I(x, t, \mu) \right] \frac{d\mu}{2}. \end{cases} \quad (1.32)$$

Le modèle P_N 1D plan est obtenu par projection de l'équation de transfert des photons sur la base orthonormée des polynômes de Legendre, notés \overline{P}_n . La projection sur un de ces éléments donne :

$$\frac{1}{c} \partial_t I_n + 4\pi \int_{-1}^1 \mu \overline{P}_n(\mu) \partial_x I \frac{d\mu}{2} = \sigma_a[acT^4 \delta_{n,0} - I_n] + \sigma_s \left[4\pi \int_{-1}^1 I(x, t, \mu') \frac{d\mu'}{2} \delta_{n,0} - I_n \right] \quad (1.33)$$

où I_n est le n -ième coefficient de I dans la base orthonormée des polynômes de Legendre normés, aussi appelé n -ième moment :

$$I(x, t, \mu) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(x, t) \overline{P}_n(\mu), \quad I_n(x, t) = 4\pi \int_{-1}^1 I(x, t, \mu) \overline{P}_n(\mu) \frac{d\mu}{2}. \quad (1.34)$$

L'approximation P_N consiste à considérer comme nuls les moments d'ordres supérieurs à N . Cela forme la condition de fermeture :

$$\forall n > N, \quad I_n = 0, \quad (1.35)$$

qui permet de tronquer la somme infinie en une somme de $N + 1$ éléments :

$$I(x, t, \mu) \mapsto \sum_{n=0}^N I_n(x, t) \overline{P}_n(\mu). \quad (1.36)$$

En utilisant la relation de récurrence sur les polynômes de Legendre normés

$$\mu \overline{P}_n(\mu) = \frac{n \overline{P}_{n-1}(\mu) + (n+1) \overline{P}_{n+1}(\mu)}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}, \quad (1.37)$$

il vient :

$$\frac{1}{c}\partial_t I_n + \partial_x \left[\frac{nI_{n-1} + (n+1)I_{n+1}}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} \right] = \sigma_a[acT^4\delta_{n,0} - I_n] + \sigma_s[I_0\delta_{n,0} - I_n]. \quad (1.38)$$

ou encore, en notation vectorielle :

$$\frac{1}{c}\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{A}\partial_x \mathbf{u} = (\sigma_a[acT^4 - I_0], -\sigma_t I_1, \dots, -\sigma_t I_N)^t, \quad (1.39)$$

avec $\mathbf{u} = (I_0, \dots, I_N)^t$ et \mathbf{A} la matrice constante, réelle, symétrique, de taille $(N+1) \times (N+1)$, définie par :

$$A_{i,j} = \frac{j+1}{\sqrt{(2j+1)(2j+3)}}\delta_{j,i-1} + \frac{i+1}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}}\delta_{j,i+1} = A_{j,i}. \quad (1.40)$$

Le système total est obtenu par la combinaison de (1.39) et de (1.21) :

$$\begin{cases} \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{A}\partial_x \mathbf{u} = (\sigma_a[acT^4 - I_0], -\sigma_t I_1, \dots, -\sigma_t I_N)^t, \\ \partial_t(\rho c_v T) = -\sigma_a[acT^4 - I_0]. \end{cases} \quad (1.41)$$

Le modèle P_N 1D plan (1.41) est constitué d'un système de taille $N+1$ couplé à l'équation de la matière, ce qui porte à $N+2$ la taille du système total. Le système est un système de lois de conservation (SLC) avec termes sources. Sa matrice jacobienne \mathbf{A} est constante, ce qui confère la propriété de linéarité au SLC homogène (*i.e.* sans termes sources) :

$$\frac{1}{c}\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{A}\partial_x \mathbf{u} = 0. \quad (1.42)$$

L'étude de la structure propre de la matrice \mathbf{A} est effectuée dans [Bru00] et on a l'égalité suivante :

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \vdots \\ \overline{P_n}(\mu) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \frac{n\overline{P_{n-1}}(\mu)}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} + \frac{(n+1)\overline{P_{n+1}}(\mu)}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}} \\ \vdots \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \vdots \\ \overline{P_n}(\mu) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (1.43)$$

$$\forall \mu \in [-1, 1], \quad \overline{P_{N+1}}(\mu) = 0,$$

il vient :

- les valeurs propres de \mathbf{A} sont les $N+1$ racines réelles distinctes λ_q du polynôme $\overline{P_{N+1}}$ sur $[-1, 1]$,
- les vecteurs propres à droite associés sont donnés par $\mathbf{r}_q = (\dots, \overline{P_n}(\lambda_q), \dots)^t$,
- \mathbf{A} étant symétrique réelle, les vecteurs propres à droite et à gauche sont les mêmes,
- la matrice \mathbf{A} est diagonalisable dans \mathbb{R} , de valeurs propres simples,
- le SLC (1.42) est strictement hyperbolique.

Le couplage de (1.39) avec l'équation de la matière se fait uniquement sur les moments d'ordre zéro. En effet, les moments d'ordre $k > 0$ vérifient l'équation :

$$\frac{1}{c}\partial_t u_k + \partial_x(\mathbf{A}\mathbf{u})_k = -\sigma_t u_k, \quad (1.44)$$

qui se résout indépendamment de la température de la matière T . Le système caractéristique du couplage avec la matière ne s'écrit qu'avec les moments d'ordre zéro :

$$\begin{cases} \frac{1}{c}\partial_t u_0 + \partial_x(\mathbf{A}\mathbf{u})_0 = \sigma_a(acT^4 - u_0), \\ \partial_t(\rho c_v T) = -\sigma_a(acT^4 - u_0), \end{cases} \quad (1.45)$$

Ces équations sont non-linéaires en la variable T .

Chapitre 2

Analyse mathématique et numérique des modèles P_N pour l'équation de transport de photons dans un milieu matériel figé en géométrie $1D$ sphérique

On s'intéresse à l'équation de transport de photons dans un milieu matériel figé en géométrie $1D$ sphérique :

$$\frac{1}{c}\partial_t u + \mu\partial_r u + \frac{1-\mu^2}{r}\partial_\mu u = -\sigma u + \sigma_s \langle u \rangle + q, \quad t > 0, \quad r \in \Omega, \quad -1 < \mu < 1, \quad (2.1)$$

avec Ω est un ouvert de $]0, +\infty[$ et où t, r, μ représentent respectivement les variables de temps, d'espace et d'angle. La fonction inconnue u représente l'intensité du rayonnement et est de la forme :

$$\begin{aligned} u : [0, +\infty[\times \overline{\Omega} \times]-1, 1[&\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, r, \mu) &\mapsto u(t, r, \mu), \end{aligned}$$

avec $\overline{\Omega}$ l'adhérence de Ω dans $]0, +\infty[$. On note $c > 0$ la vitesse (constante) de la lumière, σ et σ_s les opacités d'absorption et de scattering de la matière et q la source spontanée de photons dans le milieu. Toutes ces quantités sont données. On suppose que les opacités σ_s , σ et la source q dépendent de la variable spatiale r et sont positives avec $0 \leq \sigma_s \leq \sigma$. On définit en outre $0 \leq a = \sigma_s/\sigma \leq 1$. La notation $\langle \cdot \rangle$ désigne l'opérateur moyenne angulaire défini par $\langle f \rangle = \int_{-1}^1 f(\mu) \frac{d\mu}{2}$.

La résolution numérique de l'équation (2.1), et notamment les difficultés de discrétisation des effets géométriques, a fait l'objet de plusieurs études par le passé. La méthode des ordonnées discrètes est la méthode déterministe la plus couramment utilisée pour la résolution de (2.1). Dans l'application de cette méthode, l'un des principaux éléments

importants dans la précision des résultats réside dans la discrétisation du terme de dérive sur la variable angulaire. Les articles [RL70], [WM91], [Lat00], [Mac07] proposent à ce sujet plusieurs discrétisations possibles de ces effets géométriques. Des résultats obtenus via cette méthode, il résulte le constat suivant : quelle que soit la discrétisation utilisée, une faible précision des solutions numériques est constatée au centre de la sphère ($r = 0$). Ce phénomène est couramment appelé « flux-dip ». La précision des solutions numériques au voisinage de $r = 0$ est essentielle pour la simulation d'expérience de FCI. On constate de plus des phénomènes oscillatoires apparaissant au niveau des discontinuités de l'opacité. Ici, notre objectif est de construire une discrétisation de l'équation (2.1), basée sur la méthode P_N , qui ne fait pas apparaître les défauts de « flux-dip » et d'oscillations des précédentes méthodes.

2.1 Analyse mathématique de l'équation de transport

On considère dans cette section le problème aux valeurs initiales (problème de Cauchy) formé de (2.1) avec $\Omega =]0, +\infty[$ et d'une condition initiale de la forme :

$$u(0, r, \mu) = u^0(r, \mu), \quad r > 0, \quad -1 < \mu < 1, \quad (2.2)$$

avec $u^0 :]0, +\infty[\times]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée. On étudie dans cette section les questions d'existence, d'unicité et de stabilité de solution pour le problème considéré. Dans toute cette section, on suppose que la source de photons au sein du milieu est nulle, *i.e.* $q = 0$. Certains résultats restent vrais, ou s'adaptent aisément, dans le cas où q est non nul. La question de l'existence et de l'unicité se traite par la méthode des caractéristiques, méthode particulièrement adaptée aux problèmes de transport. Cette méthode consiste à rechercher les courbes le long desquelles l'équation (2.1) se réécrit comme une équation différentielle ordinaire. Dans le cas du transport en géométrie 1D sphérique, les courbes caractéristiques sont définies de la manière suivante.

Propriété 2.1. On définit la courbe caractéristique issue de $(r_0, \mu_0) \in]0, +\infty[\times]-1, 1[$ comme l'unique solution maximale sur \mathbb{R} du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} r' = c\mu, \\ \mu' = c \frac{1 - \mu^2}{r}, \end{cases} \quad (2.3)$$

avec la condition initiale $r(0) = r_0, \mu(0) = \mu_0$. On a alors :

$$r(t) = \sqrt{r_0^2 + 2cr_0\mu_0 t + c^2 t^2}, \quad r(t)\mu(t) = r_0\mu_0 + ct, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

De plus, l'application $(r_0, \mu_0) \mapsto (r(t), \mu(t))$ est inversible pour tout $t \in \mathbb{R}$ et l'application inversible est obtenue par changement de variable $t = -t$ dans (2.4). La figure (2.1) représente, dans le plan (r, μ) , quelques courbes caractéristiques pour différentes conditions initiales.

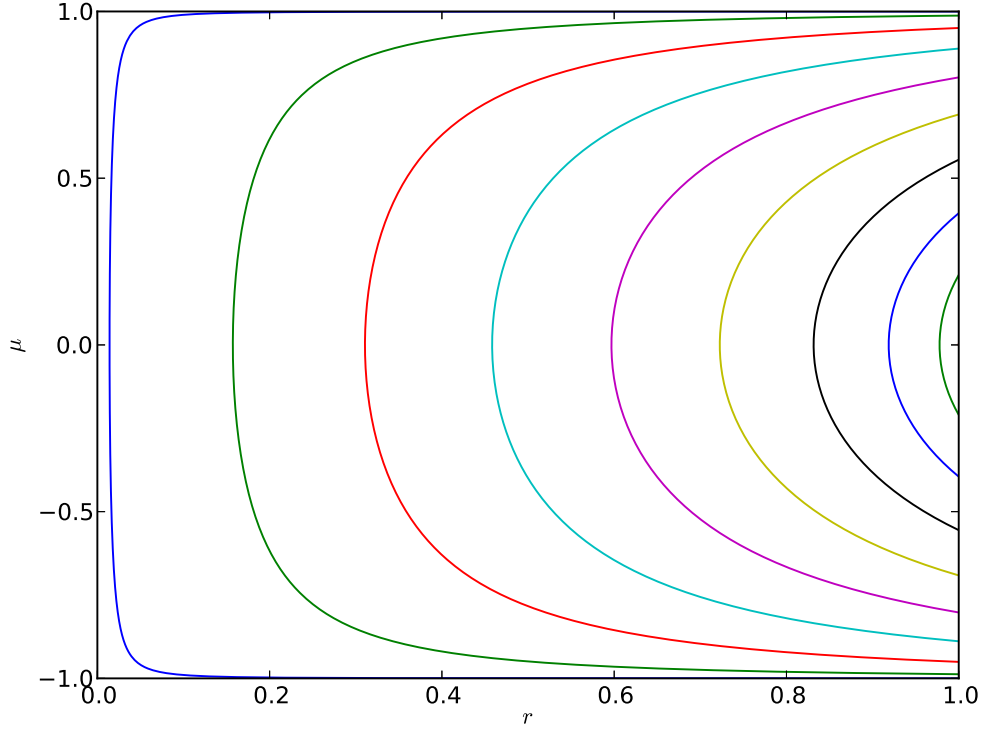


FIGURE 2.1 – Quelques courbes caractéristiques pour l'équation de transport 1D sphérique.

Démonstration. Le système différentiel (2.3) est de la forme $x' = f(x)$ où f est une fonction localement lipschitzienne sur $]0, +\infty[\times]-1, 1[$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure donc l'existence et l'unicité d'une solution maximale pour le problème de Cauchy décrit ci-dessus. On note (r, μ) cette solution. En remarquant que $(r\mu)' = c$, il vient directement $r(t)\mu(t) = r_0\mu_0 + ct$. Puis, en remarquant que $(r^2)' = 2cr\mu$, on obtient $r^2(t) = r_0^2 + 2cr_0\mu_0 t + c^2 t^2$. Comme l'on choisit uniquement les solutions à valeurs dans $]0, +\infty[\times]-1, 1[$, il vient les expressions (2.4). La propriété d'inversibilité est une conséquence directe du théorème de Cauchy-Lipschitz. \square

Le long des courbes caractéristiques, on a $\frac{du}{dt} = \partial_t u + c\mu\partial_r u + c\frac{1-\mu^2}{r}\partial_\mu u$, si bien que (2.1) se réécrit comme une équation différentielle ordinaire :

$$\frac{du}{dt} = -c\sigma(u - a(u)). \quad (2.5)$$

Le résultat d'inversibilité dans la propriété (2.1) permet d'affirmer le résultat suivant. S'il existe une unique solution pour tout t positif au problème formé de (2.5) et d'une

condition initiale $u(0) = u^0 \in \mathbb{R}$, alors il en est de même pour le problème original (2.1) + (2.2). On a alors le résultat suivant.

Propriété 2.2. Dans le cas où a est nul, si σ est une fonction continue, alors le problème défini par (2.1) et la condition initiale (2.2) possède une unique solution définie pour tout t positif. Dans le cas du transport dans le vide ($\sigma = 0$), cette solution vérifie de plus le principe du maximum :

$$\inf_{r,\mu} u^0(r, \mu) \leq u(t, r, \mu) \leq \sup_{r,\mu} u^0(r, \mu), \quad t \geq 0. \quad (2.6)$$

En particulier, si $u^0 \geq 0$ alors $u \geq 0$.

Démonstration. Lorsque $a = 0$, l'équation (2.5) s'écrit $\frac{du}{dt} = -\sigma u$. Comme σ est continue le long des caractéristiques (qui sont continues), on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz (global) et affirmer l'existence et l'unicité d'une solution pour tout t positif pour le problème formé de (2.5) et de la condition initiale $u(0) = u^0 \in \mathbb{R}$. Dans le cas du transport dans le vide, la solution est constante le long des caractéristiques et on obtient directement le principe du maximum (2.6). \square

Cette dernière propriété est valable uniquement dans le cas où a est nul. Dans le cas général (a non nul), l'équation (2.1) devient intégro-différentielle, ce qui rend l'étude de l'existence et de l'unicité de solution pour le problème de Cauchy (2.1) + (2.2) moins aisée. On ne traite pas ces questions ici. On montre cependant que, dans le cas général, on dispose d'un résultat de stabilité en norme L^2 pour les solutions de l'équation de transport.

Propriété 2.3. Toute solution u de (2.1) vérifie l'équation suivante :

$$\frac{1}{c} \partial_t \langle u^2 \rangle + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \langle \mu u^2 \rangle) = -2\sigma (\langle u^2 \rangle - a \langle u \rangle^2). \quad (2.7)$$

Si l'on suppose de plus u à support compact sur $]0, +\infty[\times]-1, 1[$ pour tout $t \geq 0$, alors la norme L^2 de u décroît avec le temps :

$$\frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} r^2 \langle u^2 \rangle dr \leq 0.$$

Démonstration. En multipliant (2.1) par $2u$, et en prenant la moyenne angulaire, on obtient directement (2.7). La négativité du membre de droite est une conséquence directe de l'inégalité de Hölder et de $0 \leq a \leq 1$. Il vient le résultat en multipliant (2.7) par r^2 et en intégrant pour r variant de 0 à $+\infty$; le terme de flux s'annulant par l'hypothèse de compacité du support de u . \square

On s'intéresse enfin au cas particulier où $a = 1$. Ce cas correspond à la propagation d'un rayonnement dans un matériau purement diffusif. Dans cette configuration, les solutions de (2.1) vérifient la conservation de l'énergie radiative et satisfont une équation de type parabolique dans la limite diffusion, comme le montre les deux propriétés ci-dessous.

Propriété 2.4. Dans la cas où $a = 1$, toute solution u de (2.1) vérifie la loi de conservation suivante :

$$\partial_t \rho + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 j) = 0, \quad (2.8)$$

avec $\rho = \langle u \rangle / c$ et $j = \langle \mu u \rangle$ respectivement la densité d'énergie radiative et le flux d'énergie. Si l'on suppose de plus j à support compact sur $]0, +\infty[$, alors on a la conservation de l'énergie radiative :

$$\frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} r^2 \rho dr = 0.$$

Démonstration. On obtient (2.8) en prenant la moyenne angulaire de (2.1). En multipliant par r^2 l'équation (2.8) puis en intégrant pour r variant de 0 à $+\infty$; le terme de flux s'annulant sous l'hypothèse de compacité du support de j . \square

On rappelle à présent ce qu'on appelle « limite diffusion » et on étudie le comportement des solutions de (2.1) dans cette limite asymptotique. On appelle limite diffusion la limite dans laquelle les phénomènes d'interactions entre les photons et le milieu sont prépondérants devant les phénomènes de transport des photons. Formellement, cela revient à choisir des ordres de grandeurs spécifiques pour les paramètres intervenants dans (2.1).

Définition 2.1. On définit les variables sans dimension \hat{t} , \hat{r} et $\hat{\sigma}$ par :

$$t = \hat{t} \tau, \quad r = \hat{r} \ell, \quad \sigma = \hat{\sigma} / \lambda, \quad (2.9)$$

avec τ, ℓ respectivement le temps et la longueur caractéristique du problème et λ le libre parcours moyen des particules. Il apparaît alors deux quantités sans dimension : $c\tau/\ell$ et ℓ/λ . En posant $c\tau/\ell = 1/\epsilon$ et $\ell/\lambda = 1/\epsilon$, on appelle limite diffusion, la limite lorsque ϵ tend vers 0.

En utilisant la mise à l'échelle (2.9), l'équation (2.1) se réécrit :

$$\partial_t u^\epsilon + \frac{1}{\epsilon} \mu \partial_r u^\epsilon + \frac{1}{\epsilon} \frac{1 - \mu^2}{r} \partial_\mu u^\epsilon = -\frac{\sigma}{\epsilon^2} (u^\epsilon - \langle u^\epsilon \rangle), \quad (2.10)$$

où la fonction inconnue u^ϵ dépend à présent du paramètre ϵ . Il est alors connu [BBS12] que lorsque l'on fait tendre ϵ vers 0, les solutions u_ϵ de (2.10) converge, dans un certain sens, vers u telle que $\rho = \langle u \rangle$ vérifie l'équation de diffusion suivante :

$$\partial_t \rho - \frac{1}{r^2} \partial_r \left(\frac{r^2}{3\sigma} \partial_r \rho \right) = 0. \quad (2.11)$$

Le coefficient $1/3\sigma$ est appelé coefficient de diffusion. Une preuve purement formelle consiste à écrire u^ϵ comme un développement en puissance de ϵ : $u^\epsilon = u^0 + \epsilon u^1 + \dots$ et à identifier les termes du même ordre dans l'équation (2.10). En notant $\rho = \langle u \rangle$ et $j = \langle \mu u \rangle$, l'identification des termes d'ordre 0 donnent :

$$\partial_t \rho^0 + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 j^1) = 0.$$

On obtient une expression de j^1 en identifiant les termes d'ordre -2 et -1 :

$$u_0 = \langle u^0 \rangle = \rho^0, \quad \mu \partial_r u^0 + \frac{1 - \mu^2}{r} \partial_\mu u^0 = -\sigma(u^1 - \langle u^1 \rangle).$$

On a alors $j^1 = -\frac{\langle \mu^2 \rangle}{\sigma} \partial_r \rho^0$, et en remarquant que $\langle \mu^2 \rangle = 1/3$, il vient le résultat.

La résolution numérique directe de (2.1) est très coûteuse en temps CPU et en mémoire. Pour illustration, une simulation de ce genre en 3 dimensions d'espace requiert de discrétiser un espace à 6 dimensions (3 variables spatiales, 2 variables angulaires et une variable de temps)... Si l'on considère de plus la dimension fréquentielle, le nombre de dimensions s'élève à 7. Dans la suite, notre objectif est donc de construire un modèle réduit pour (2.1) moins coûteux à résoudre. Le modèle réduit doit idéalement restituer les propriétés de l'équation mises en évidence dans cette section.

2.2 Construction des modèles P_N

Dans cette partie, on présente une famille de modèles réduits pour (2.1), appelés modèles P_N . Pour que les calculs qui suivent aient un sens, on suppose que $\mu \mapsto u(t, r, \mu)$ est une fonction de $L^2([-1, 1])$ quels que soient $t \geq 0$ et $r \in \overline{\Omega}$. De plus, on munit l'espace $L^2([-1, 1])$ du produit scalaire défini par :

$$\forall f, g \in L^2([-1, 1]), \quad \langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(\mu)g(\mu) \frac{d\mu}{2}.$$

On considère alors une base orthonormée de $L^2([-1, 1])$, notée $(P_\ell)_{\ell \geq 0}$. Ces fonctions de base sont appelées harmoniques sphériques et s'identifient, en une dimension d'espace, aux polynômes de Legendre définis comme ci-dessous.

Définition 2.2. La famille des polynômes de Legendre $(P_\ell)_{\ell \geq 0}$ est définie par récurrence :

$$XP_\ell = \frac{\ell}{\sqrt{(2\ell-1)(2\ell+1)}} P_{\ell-1} + \frac{\ell+1}{\sqrt{(2\ell+1)(2\ell+3)}} P_{\ell+1}, \quad (2.12)$$

pour tout entier $\ell \geq 1$, et avec $P_0 = 1$ et $P_1 = \sqrt{3}X$.

Propriété 2.5. La famille des polynômes de Legendre $(P_\ell)_{\ell \geq 0}$ vérifie les propriétés suivantes : (1) c'est une base orthormée de $L^2([-1, 1])$, (2) pour tout entier ℓ positif, P_ℓ est solution sur $]-1, 1[$ de l'équation différentielle ordinaire du second ordre :

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)P'_\ell] + \ell(\ell+1)P_\ell = 0, \quad (2.13)$$

(3) pour tout entier ℓ positif, on a la relation de récurrence suivante :

$$P_\ell = \frac{P'_{\ell+1}}{\sqrt{(2\ell+1)(2\ell+3)}} - \frac{P'_{\ell-1}}{\sqrt{(2\ell-1)(2\ell+1)}}, \quad (2.14)$$

où l'on a pris comme convention $P_{-1} = 0$.

Une conséquence directe de la propriété précédente est la décomposition suivante pour toute fonction f de $L^2([-1, 1])$:

$$f = \sum_{\ell=0}^{\infty} \langle P_{\ell}, f \rangle P_{\ell}, \quad (2.15)$$

où, pour tout entier ℓ positif, le coefficient $\langle P_{\ell}, f \rangle$ est appelé harmonique de rang ℓ de f . L'hypothèse de base permettant la construction des modèles P_N consiste alors à appliquer cette décomposition à la fonction $\mu \mapsto u(t, r, \mu)$ et de tronquer la somme à partir d'un certain rang N strictement positif :

$$u \simeq \sum_{\ell=0}^N \langle P_{\ell}, u \rangle P_{\ell}, \quad (2.16)$$

celà revient encore à supposer nulles les harmoniques de rang $\ell > N$. On remarque que les harmoniques de rang 0 et de rang 1 s'identifient respectivement, et au facteur près, à la densité d'énergie radiative et au flux d'énergie : $\rho = \langle P_0, u \rangle / c$, $j = \langle P_1, u \rangle / \sqrt{3}$. L'approximation (2.16) restreint la fonction inconnue u à un espace de dimension $N + 1$; elle est entièrement déterminée par ses $N + 1$ premières harmoniques $(\langle P_{\ell}, u \rangle)_{0 \leq \ell \leq N}$. En projetant l'équation (2.1) sur chacun des éléments de la base de Legendre, on obtient pour tout entier ℓ positif :

$$\frac{1}{c} \partial_t \langle P_{\ell}, u \rangle + \partial_r \langle \mu P_{\ell}, u \rangle + \frac{1}{r} \langle (1 - \mu^2) P_{\ell}, \partial_{\mu} u \rangle = -\sigma (\langle P_{\ell}, u \rangle - a \langle u \rangle \delta_{\ell,0}) + q \delta_{\ell,0}. \quad (2.17)$$

avec δ le symbole de Kronecker, et où l'on a utilisé la propriété d'orthonormalité des polynômes de Legendre. Les deuxième et troisième termes du membre de gauche se réexpriment grâce au lemme suivant.

Lemme 2.1. Soit f une fonction de $L^2([-1, 1])$. Pour tout entier ℓ positif, on a l'égalité suivante :

$$\langle \mu P_{\ell}, f \rangle = \frac{\ell}{\sqrt{(2\ell-1)(2\ell+1)}} \langle P_{\ell-1}, f \rangle + \frac{\ell+1}{\sqrt{(2\ell+1)(2\ell+3)}} \langle P_{\ell+1}, f \rangle, \quad (2.18)$$

et, si f est dérivable, on a de plus :

$$\langle (1 - \mu^2) P_{\ell}, f' \rangle = \frac{(\ell+1)(\ell+2)}{\sqrt{(2\ell+1)(2\ell+3)}} \langle P_{\ell+1}, f \rangle - \frac{(\ell-1)\ell}{\sqrt{(2\ell-1)(2\ell+1)}} \langle P_{\ell-1}, f \rangle, \quad (2.19)$$

avec $P_{-1} = 0$ par convention.

Démonstration. Soit ℓ un entier positif. En utilisant la formule de récurrence (2.12), on obtient directement (2.18). Pour montrer (2.19), on commence par intégrer par partie :

$$\langle (1 - \mu^2) P_{\ell}, f' \rangle = - \left\langle \frac{d}{d\mu} [(1 - \mu^2) P_{\ell}], f \right\rangle.$$

En utilisant (2.14), on a :

$$\begin{aligned} \langle (1 - \mu^2)P_\ell, f' \rangle &= - \frac{1}{\sqrt{(2\ell+1)(2\ell+3)}} \left\langle \frac{d}{d\mu}[(1 - \mu^2)P'_{\ell+1}], f \right\rangle \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{(2\ell-1)(2\ell+1)}} \left\langle \frac{d}{d\mu}[(1 - \mu^2)P'_{\ell-1}], f \right\rangle, \end{aligned}$$

puis, avec (2.13), il vient le résultat. \square

En utilisant le lemme précédent, on obtient, pour tout entier ℓ positif, une équation aux dérivées partielles couplant les harmoniques $\langle P_{\ell-1}, u \rangle$, $\langle P_\ell, u \rangle$ et $\langle P_{\ell+1}, u \rangle$. Comme de plus, on a supposé dans (2.16) que l'harmonique de rang $N+1$ est nulle, le système formé des équations (2.17) pour ℓ variant de 0 à N est fermé et s'écrit, sous forme vectorielle :

$$\frac{1}{c} \partial_t U + \partial_r(AU) + \frac{1}{r} GU = -\sigma(U - aJU) + Q, \quad t > 0, \quad r \in \Omega, \quad (2.20)$$

avec $U : [0, +\infty[\times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ la fonction inconnue représentant le vecteur des $N+1$ premières harmoniques de u , $U = (\langle P_0, u \rangle, \dots, \langle P_N, u \rangle)^t$. Les quantités A , G et J sont des matrices réelles, constantes et de taille $(N+1) \times (N+1)$. Les coefficients de A et G sont données par :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \frac{i+1}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}} \delta_{j,i+1} + \frac{j+1}{\sqrt{(2j+1)(2j+3)}} \delta_{j,i-1}, \\ G_{ij} &= \frac{(i+1)(i+2)}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}} \delta_{j,i+1} - \frac{j(j+1)}{\sqrt{(2j+1)(2j+3)}} \delta_{j,i-1}, \end{aligned}$$

pour $i, j \in \{0, \dots, N\}$, et $J = \text{diag}(1, 0, \dots, 0)$. La quantité Q est un vecteur de taille $N+1$ égal à $(q, 0, \dots, 0)^t$. Le système (2.20) est appelé modèle P_N . Dans le cas $N=1$, le système (2.20) s'écrit en fonction des deux inconnues ρ , la densité d'énergie radiative, et j , le flux d'énergie :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_r j + \frac{2j}{r} = -c\sigma(1-a)\rho + q, \\ \partial_t j + \frac{c^2}{3} \partial_r \rho = -c\sigma j. \end{cases} \quad (2.21)$$

Les propriétés suivantes donnent quelques informations quant à la structure du système (2.20).

Propriété 2.6. La matrice A est réelle symétrique, donc diagonalisable dans \mathbb{R} . Ses valeurs propres sont les $N+1$ racines réelles distinctes du polynôme de Legendre P_{N+1} , que l'on note $(\lambda_\ell)_{0 \leq \ell \leq N}$. Si λ est l'une de ces valeurs propres, alors son espace propre associé est de dimension 1 et est engendré par le vecteur $(P_0(\lambda), \dots, P_N(\lambda))^t$. On peut alors écrire A sous la forme $R\Lambda R^t$, avec Λ la matrice diagonale des valeurs propres de A et R la matrice orthonormale constituée des vecteurs propres associés normés à 1. On note de plus que la partie symétrique de G est égale à A .

Démonstration. Connaissant explicitement les coefficients de A , on montre que A est symétrique en remarquant que $A = A^t$. En utilisant la propriété de récurrence des polynômes de Legendre (2.12), il vient que :

$$A \begin{pmatrix} P_0 \\ \vdots \\ P_N \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} P_0 \\ \vdots \\ P_N \end{pmatrix},$$

pour tout μ vérifiant $P_{N+1}(\mu) = 0$. Comme il est connu que le polynôme P_{N+1} possède exactement $N + 1$ racines réelles, il vient la première partie du résultat. Pour montrer que la partie symétrique de G vaut A , il suffit de vérifier que $G + G^t = 2A$, connaissant explicitement les coefficients de A et G . \square

Corollaire 2.1. Les valeurs propres de A sont toutes comprises strictement entre -1 et 1 . Si λ est une valeur propre de A , alors il en est de même pour $-\lambda$. 0 est valeur propre de A si et seulement si N est pair ; en conséquence, A est inversible si et seulement si N est impair.

Démonstration. Ce sont des propriétés connues des racines de polynôme de Legendre. \square

Définition 2.3. D'après le corollaire précédent, la matrice A possède des valeurs propres positives et négatives. On définit alors $\Lambda^+ = \text{diag}(\max(\lambda_\ell, 0), 0 \leq \ell \leq N)$ et $\Lambda^- = \text{diag}(\min(\lambda_\ell, 0), 0 \leq \ell \leq N)$, puis $A^\pm = R\Lambda^\pm R^t$.

À l'aide de la propriété (2.6) et de la définition précédente, on peut réécrire le modèle P_N (2.20) en utilisant le changement de variables $V = R^t U$:

$$\frac{1}{c} \partial_t V + \Lambda \partial_r V + \frac{1}{r} R^t G R V = -\sigma(V - a R^t J R V) + R^t Q. \quad (2.22)$$

Dans le cas P_1 , les deux composantes du vecteur V s'expriment par $\rho \pm \frac{\sqrt{3}}{c} j$. Lorsque N est impair, le corollaire précédent implique que A possède exactement $(N + 1)/2$ valeurs propres (strictement) positives, et autant de valeurs propres (strictement) négatives qui sont leurs opposées. On définit les quantités suivantes.

Propriété 2.7. Lorsque N est impair, la matrice Λ s'écrit sous la forme suivante :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix},$$

où D est la matrice diagonale formée des valeurs propres positives de A . Comme la partie symétrique de G est égale à A , on peut écrire :

$$R^t G R = \begin{pmatrix} D + G_1 & G_2 \\ G_3 & -D + G_4 \end{pmatrix},$$

avec G_1, G_4 deux matrices antisymétriques et G_2, G_3 deux matrices vérifiant $G_2 = -G_3^t$. De plus, la première ligne de la matrice R est de la forme (L^t, L^t) de sorte qu'on ait :

$$R^t J R = \begin{pmatrix} L \\ L \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} L \\ L \end{pmatrix}, \quad R^t Q = q \begin{pmatrix} L \\ L \end{pmatrix}.$$

En séparant le vecteur V en deux blocs $V^t = ((V^+)^t, (V^-)^t)$, le modèle P_N (2.22) se réécrit de manière équivalente sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{1}{c}\partial_t V^+ + D\partial_r V^+ + \frac{1}{r}[(D + G_1)V^+ + G_2 V^-] \\ \quad = -\sigma(V^+ - a(L \otimes L)(V^+ + V^-) + qL, \\ \frac{1}{c}\partial_t V^- - D\partial_r V^- + \frac{1}{r}[G_3 V^+ - (D - G_4)V^-] \\ \quad = -\sigma[V^- - a(L \otimes L)(V^+ + V^-)] + qL. \end{cases}$$

Dans le cas P_1 , on $V^\pm = \rho \pm \frac{\sqrt{3}}{c}j$. À présent, il convient d'étudier les solutions des modèles P_N et, en particulier, de vérifier si celles-ci restituent les propriétés des solutions de l'équation de transport (2.1) mises en évidence dans la section précédente.

2.3 Analyse mathématique des modèles P_N

On considère dans cette section le problème de Cauchy formé de (2.20) avec $\Omega =]0, +\infty[$ et d'une condition initiale de la forme :

$$U(0, r) = U^0(r), \quad r > 0, \quad (2.23)$$

où $U^0 :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ une fonction donnée. Encore une fois, dans toute cette section, on suppose que q est nul. Certains résultats restent vrais, ou d'adaptent aisément, dans le cas où q est non nul. De même que dans la section (2.1), on s'intéresse ici aux questions d'existence, d'unicité et de stabilité de solution pour le problème considéré. L'objectif est de comparer ces propriétés avec celles vérifiées par les solutions de l'équations de transport (2.1). On s'intéresse dans un premier temps au cas du modèle P_1 ($N = 1$), c'est-à-dire au problème formé de (2.21) et de la condition initiale :

$$\rho(0, r) = \rho^0(r), \quad j(0, r) = j^0(r), \quad r > 0. \quad (2.24)$$

Dans ce qui suit, on aura parfois besoin d'évaluer ρ^0 et j^0 en des valeurs négatives. Guidé par la physique sous-jacente du problème, on suppose que ρ^0 et j^0 sont respectivement des fonctions paire et impaire. On a alors le résultat suivant.

Propriété 2.8. Dans le cas du transport dans le vide ($\sigma = 0$), le problème (2.21) + (2.24) possède une unique solution pour tout t positif, qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \rho(t, r) = & \frac{1}{2r} \left[\left(r + \frac{ct}{\sqrt{3}} \right) \rho^0 \left(r + \frac{ct}{\sqrt{3}} \right) + \left(r - \frac{ct}{\sqrt{3}} \right) \rho^0 \left(\left| r - \frac{ct}{\sqrt{3}} \right| \right) \right] \\ & - \frac{\sqrt{3}}{c} \frac{1}{2r} \left[\left(r + \frac{ct}{\sqrt{3}} \right) j^0 \left(r + \frac{ct}{\sqrt{3}} \right) - \left| r - \frac{ct}{\sqrt{3}} \right| j^0 \left(\left| r - \frac{ct}{\sqrt{3}} \right| \right) \right] \\ & - \frac{\sqrt{3}}{c} \frac{1}{2r} \int_{|r-ct/\sqrt{3}|}^{r+ct/\sqrt{3}} j^0(s) ds. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Le flux radiatif j est alors calculé à partir de la deuxième équation de (2.21).

Démonstration. Il suffit de remarquer que le problème se ramène de manière équivalente à un problème aux valeurs initiales pour l'équation des ondes :

$$\begin{cases} \partial_{tt}(r\rho) - \frac{c^2}{3}\partial_{rr}(r\rho) = 0, & t \geq 0, \quad r \geq 0, \\ r\rho(0, r) = r\rho^0(r), & r \geq 0, \\ \partial_t(r\rho)(0, r) = -r(j^0)'(r) - 2j^0(r), & r \geq 0, \end{cases}$$

pour lequel il est connu qu'il existe une unique solution, pour tout t positif, qui s'écrit d'après la formule de d'Alembert :

$$\begin{aligned} r\rho(t, r) &= \frac{1}{2} \left(r + \frac{ct}{\sqrt{3}} \right) \rho^0 \left(r + \frac{ct}{\sqrt{3}} \right) + \frac{1}{2} \left(r - \frac{ct}{\sqrt{3}} \right) \rho^0 \left(r - \frac{ct}{\sqrt{3}} \right) \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{2c} \int_{r-ct/\sqrt{3}}^{r+ct/\sqrt{3}} [-s(j^0)'(s) - 2j^0(s)] ds. \end{aligned}$$

En calculant explicitement l'intégrale et en considérant que ρ^0 et j^0 sont des fonctions respectivement paire et impaire, il vient la formule (2.25). \square

Cette solution analytique obtenue dans un cas simple permet de montrer en particulier que les solutions du modèle P_N ne respectent pas le principe du maximum dans le cas du transport dans le vide, contrairement aux solutions de l'équation de transport (voir figure (2.2)). Dans le cas général, les questions d'existence et d'unicité de solution pour le problème considéré ne sont pas aisées, même dans le cas du transport dans le vide. On ne les traite pas ici. En revanche, on montre que les solutions du modèles P_N (2.20) satisfont à la même propriété de stabilité en norme L^2 que les solutions de l'équation de transport, comme le montre la propriété suivante.

Propriété 2.9. Toute solution U de (2.20) vérifie l'équation suivante :

$$\frac{1}{c} \partial_t \langle U, U \rangle + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \langle U, AU \rangle) = -2\sigma \langle U, (I - aJ)U \rangle \leq 0. \quad (2.26)$$

Si l'on suppose de plus U à support compact sur $]0, +\infty[$ pour tout t positif, alors la norme L^2 de U décroît avec le temps :

$$\frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} r^2 \langle U, U \rangle dr \leq 0.$$

Remarquons de plus que, sous l'hypothèse (2.16), on a bien $\langle u^2 \rangle = \langle U, U \rangle$ grâce à l'orthonormalité des polynômes de Legendre.

Démonstration. Soit U une solution de (2.20). L'équation (2.26) s'obtient en effectuant le produit scalaire de $2U$ avec (2.20) et en remarquant que la partie symétrique de G vaut A (voir propriété (2.6)). Le membre de droite est toujours négatif puisque c'est une forme quadratique dont la matrice est symétrique à valeurs propres négatives. En multipliant (2.26) par r^2 et en intégrant pour r variant de 0 à $+\infty$, il vient alors le résultat ; le terme de flux s'annulant sous l'hypothèse de compacité du support de U . \square

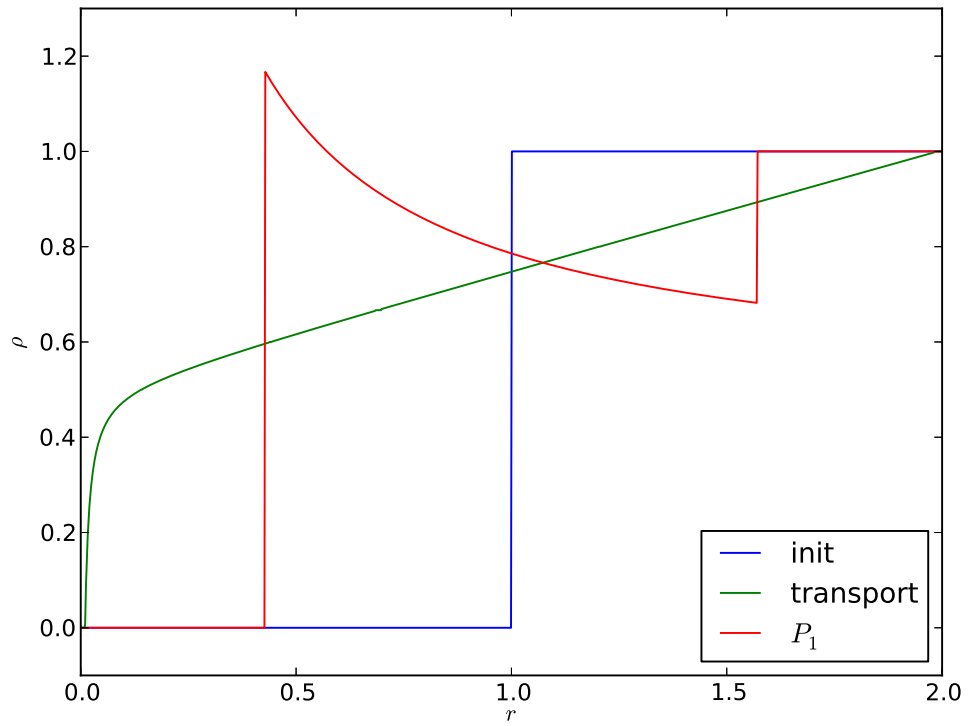


FIGURE 2.2 – Solutions du modèle P_1 et de l'équation de transport pour un problème de Cauchy avec une condition initiale de type Riemann. La solution du modèle P_1 ne respecte pas le principe du maximum alors que c'est le cas pour la solution de l'équation de transport.

De même que dans la section (2.1), on étudie le cas particulier où $a = 1$. On montre alors que les solutions de (2.20) vérifient la conservation de l'énergie radiative, de même que les solutions de l'équation de transport.

Propriété 2.10. Dans le cas $a = 1$, les solutions de (2.20) vérifie la loi de conservation suivante :

$$\partial_t \rho + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 j) = 0, \quad (2.27)$$

avec $\rho = \langle e_0, U \rangle / c$ la densité d'énergie radiative et $j = \langle e_1, U \rangle / \sqrt{3}$ le flux d'énergie. Si l'on suppose de plus j à support compact sur $[0, +\infty[$, alors on a la conservation de l'énergie radiative :

$$\frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} r^2 \rho dr = 0.$$

Démonstration. L'équation (2.27) est simplement la première ligne de (2.20). On obtient ensuite le résultat en intégrant pour r variant de 0 et $+\infty$ et en utilisant l'hypothèse de compacité du support de j . \square

Enfin, on montre que les solutions du modèle P_N (2.20) possèdent le « bon » comportement (comprendre « le même que celui des solutions de l'équation de transport ») dans la limite diffusion. En effet, en utilisant la mise à l'échelle proposée dans la définition (2.1), le modèle P_N se réécrit :

$$\partial_t U^\epsilon + \frac{1}{\epsilon} \partial_r (A U^\epsilon) + \frac{1}{\epsilon r} G U^\epsilon = -\frac{\sigma}{\epsilon^2} (I - J) U^\epsilon, \quad (2.28)$$

où la fonction inconnue U^ϵ dépend à présent du paramètre ϵ , et on a le résultat suivant.

Propriété 2.11. Soit U^ϵ une solution de (2.28). Dans la limite asymptotique de diffusion ($\epsilon \rightarrow 0$), U^ϵ converge vers U où $\rho = \langle e_0, U \rangle$ vérifie une équation de diffusion (2.11) avec $1/3\sigma$ comme coefficient de diffusion. Cette propriété et la preuve qui suit sont purement formels et ne montre uniquement que, s'il y a convergence, alors cette dernière s'effectue vers la bonne limite.

Démonstration. On écrit U^ϵ comme un développement en puissance successives de ϵ : $U^\epsilon = U^0 + \epsilon U^1 + \dots$, et on identifie les termes du même ordre dans l'équation (2.28). On pose $\rho = \langle U, e_0 \rangle$ et $j = \langle U, e_1 \rangle / \sqrt{3}$. Les termes d'ordre 0 donnent :

$$\partial_t \rho^0 + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 j^1) = 0.$$

On obtient l'expression de j^1 en identifiant les termes d'ordres -2 et -1 :

$$\langle U^0, e_n \rangle = 0, \quad n > 0, \quad \frac{1}{3} \partial_r \rho^0 = -\sigma j^1,$$

d'où l'on tire $j^1 = -\frac{1}{3\sigma} \partial_r \rho^0$, ce qui termine la démonstration. \square

La fin de cette section est consacrée à l'écriture du modèle P_N (2.20) sous une forme conservative, *i.e.* sans termes source. Dans ce but, on considère l'équation adjointe de (2.20), qui s'écrit :

$$\frac{1}{c}\partial_t V + \partial_r(AV) + \frac{1}{r}GV = \sigma(V - aJV). \quad (2.29)$$

Les solutions de cette équation sont reliées aux solutions du modèle P_N comme le montre le résultat suivant.

Propriété 2.12. Soit U une solution de (2.20) et V une solution de (2.29). On a alors la loi de conservation :

$$\frac{1}{c}\partial_t \langle V, U \rangle + \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 \langle V, AU \rangle) = 0. \quad (2.30)$$

Démonstration. On obtient le résultat en sommant le produit scalaire de V avec (2.20) et le produit scalaire de U avec (2.29). On utilise en outre la symétrie de la matrice $I - aJ$ et le fait que la partie symétrique de G est égale à A . \square

Grâce à la propriété précédente, on obtient autant de lois de conservation que l'on dispose de solutions particulières de (2.29). En conséquence, si l'on dispose d'une famille linéairement indépendante $(V_\ell)_{0 \leq \ell \leq N}$ de solutions de (2.29), on peut réécrire le modèle P_N sous la forme d'un système de lois de conservation comme le montre la propriété suivante.

Propriété 2.13. Soit U une solution du modèle P_N (2.20) et $(V_\ell)_{0 \leq \ell \leq N}$ une famille linéairement indépendante de solutions de (2.29). Alors, on a le système de lois de conservation suivant :

$$\frac{1}{c}\partial_t W + \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 F(t, r, W)) = 0, \quad (2.31)$$

avec $W = (W_0, \dots, W_N)^t$ où $W_\ell = \langle V_\ell, U \rangle$ pour tout $\ell \in \{0, \dots, N\}$. La fonction de flux est alors donnée par $F(t, r, W) = Q(t, r)W$ où $Q(t, r)$ est une matrice semblable à A , quels que soient t positif et r strictement positif. Comme A est diagonalisable (propriété (2.6)), le système est hyperbolique.

Démonstration. Connaissant une famille $V = (V_\ell)_{0 \leq \ell \leq N}$ linéairement indépendante de (2.29), on peut écrire la loi de conservation (2.30) pour chaque élément de cette famille. Il vient alors le système de lois de conservation (2.31). En notant $W = V^t(t, r)U$, il vient $F(t, r, W) = Q(t, r)W$, avec $Q(t, r) = V^t(t, r)AV^{-t}(t, r)$, qui est bien une matrice semblable à A , ce qui termine la démonstration. \square

Il reste à présent à trouver $N + 1$ solutions linéairement indépendantes de l'équation (2.29). En particulier, on peut choisir les solutions stationnaires :

$$A \frac{dV}{dr} + \frac{1}{r}GV = \sigma(V - aJV). \quad (2.32)$$

Sous des hypothèses de régularité de σ et a , on dispose d'un ensemble fondamental de solutions dans le cas où N est impair.

Propriété 2.14. Supposons N impair et σ, a des fonctions continues sur $]0, +\infty[$. Alors le problème formé de (2.32) et de la condition de bord $V(r^*) = V^* \in \mathbb{R}^{N+1}$, avec $r^* > 0$, possède une unique solution maximale définie sur $]0, +\infty[$ tout entier.

Démonstration. Lorsque N est impair et sous les hypothèses énoncées, on est dans le cadre d'application du théorème de Cauchy-Lipschitz global, ce qui termine la démonstration. \square

Définition 2.4. On note $\mathcal{P} : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathcal{M}^{N+1}(\mathbb{R})$ l'opérateur tel que, pour tout $V^* \in \mathbb{R}^{N+1}$ et tout réel strictement positif r^* , la fonction $r \mapsto \mathcal{P}(r, r^*)V^*$ soit la solution sur $]0, +\infty[$ du problème de Cauchy formé de (2.32) et de la condition de bord $V(r^*) = V^*$.

Propriété 2.15. Pour tous réels strictement positifs r_1, r_2 , la matrice $\mathcal{P}(r_2, r_1)$ est inversible d'inverse $\mathcal{P}(r_1, r_2)$. De plus, \mathcal{P} vérifie la propriété multiplicative suivante : pour tous réels strictement positifs r_1, r_2, r_3 , on a $\mathcal{P}(r_3, r_1) = \mathcal{P}(r_3, r_2)\mathcal{P}(r_2, r_1)$.

Démonstration. C'est une conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz. \square

Propriété 2.16. Grâce à la propriété (2.13), on peut écrire, lorsque N est impair, le modèle P_N sous la forme conservative suivante :

$$\frac{1}{c}\partial_t W + \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 F(r, W)) = 0, \quad F(r, W) = \mathcal{Q}(r)W, \quad (2.33)$$

avec $W = \mathcal{P}^t(r, r_0)U$ où r_0 est une constante strictement positive choisie arbitrairement, et où $\mathcal{Q}(r) = \mathcal{P}^t(r, r_0)A\mathcal{P}^{-t}(r, r_0)$ est une matrice semblable à A .

Démonstration. C'est une application de la propriété (2.13) avec l'ensemble fondamental de solution de l'équation adjointe (2.29) mis en évidence précédemment. \square

On considère à présent l'exemple P_1 avec $a = 1$. Dans ce cas, l'opérateur \mathcal{P} se calcule explicitement en intégrant le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{dj}{dr} + \frac{2j}{r} = 0, \\ \frac{c^2}{3} \frac{d\rho}{dr} = c\sigma j, \end{cases}$$

On obtient alors pour tous réels r_1, r_2 strictement positifs :

$$\mathcal{P}(r_2, r_1) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3\bar{\sigma}}{c}(r_2 - r_1)(r_1/r_2) \\ 0 & r_1^2/r_2^2 \end{pmatrix},$$

avec $\bar{\sigma}$ la moyenne de σ sur l'intervalle $[r_1, r_2]$ pondérée par la fonction $1/r^2$.

2.4 Analyse du problème stationnaire

Dans cette section, on s'intéresse à la structure et aux propriétés des états stationnaires du modèle P_N (2.20). On étudie les solutions du modèle P_N sous forme diagonalisée :

$$\Lambda \frac{dV}{dr} + \frac{1}{r} R^t G R V = -\sigma(V - a R^t J R V), \quad r > 0, \quad (2.34)$$

où la fonction inconnue V est ici définie sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans \mathbb{R}^{N+1} . Les quantités σ et a sont des fonctions de la variable r , définies sur $]0, +\infty[$ et telles que σ soit positive et a comprise entre 0 et 1. On suppose de plus que N est impair si bien que la matrice Λ est inversible. On rappelle que, dans ce cas, la matrice Λ est de la forme $\text{diag}(D, -D)$ où D est une matrice diagonale strictement positive, la matrice J est positive et la matrice R orthogonale. La partie symétrique de $R^t G R$ vaut Λ . De plus, on utilisera fréquemment la décomposition suivante :

$$V = \begin{pmatrix} V^+ \\ V^- \end{pmatrix}.$$

Dans le cas P_1 , on a $V^\pm = \rho \pm \frac{\sqrt{3}}{c} j$. Lorsque σ et a sont suffisamment régulières (continues suffit), on sait que le problème formé de l'équation (2.34) et de la condition de bord $V(r^*) = V^* \in \mathbb{R}^{N+1}$, avec $r^* > 0$, admet une unique solution maximale définie sur $]0, +\infty[$ (théorème de Cauchy-Lipschitz). Pour tous réels r_1, r_2 strictement positifs, on définit l'opérateur $\mathcal{S}(r_2, r_1)$ tel que, pour toute solution V de (2.34), on ait $\mathcal{S}(r_2, r_1)V(r_1) = V(r_2)$. Cet opérateur est linéaire, inversible et, pour tous réels r_1, r_2, r_3 strictement positifs, il vérifie $\mathcal{S}(r_3, r_1) = \mathcal{S}(r_3, r_2)\mathcal{S}(r_2, r_1)$.

Propriété 2.17. Soit r_1, r_2 deux réels strictement positifs tels que $r_1 < r_2$. Toute solution V de (2.34) vérifie l'inégalité suivante :

$$r_2^2 \langle V_2^+, DV_2^+ \rangle + r_1^2 \langle V_1^-, DV_1^- \rangle \leq r_1^2 \langle V_1^+, DV_1^+ \rangle + r_2^2 \langle V_2^-, DV_2^- \rangle, \quad (2.35)$$

avec $V_1^\pm = V^\pm(r_1)$ et $V_2^\pm = V^\pm(r_2)$. Cette relation est appelée inégalité d'énergie.

Démonstration. Soit V une solution de (2.34). Le produit scalaire de $2V$ avec (2.34) s'écrit :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \langle V, \Lambda V \rangle)}{dr} = -2\sigma \langle V, (I - a R^t J R) V \rangle \leq 0,$$

où l'on a utilisé le fait que la partie symétrique de $R^t G R$ vaut Λ . En intégrant cette dernière équation pour r variant de r_1 à r_2 , on obtient :

$$\begin{aligned} & r_2^2 \langle V_2^+, DV_2^+ \rangle + r_1^2 \langle V_1^-, DV_1^- \rangle + 2 \int_{r_1}^{r_2} s^2 \sigma \langle V(s), (I - a R^t J R) V(s) \rangle ds \\ &= r_1^2 \langle V_1^+, DV_1^+ \rangle + r_2^2 \langle V_2^-, DV_2^- \rangle. \end{aligned}$$

Comme la fonction a est comprise entre 0 et 1, la matrice $I - a R^t J R$ est positive, si bien que le terme intégral est toujours positif (par positivité de σ). Ceci termine la démonstration. \square

Corollaire 2.2. Soit r_1, r_2 deux réels strictement positifs tels que $r_1 < r_2$. On considère l'opérateur défini tel que, pour toute solution V de (2.34), on ait :

$$\begin{pmatrix} V_1^+ \\ V_1^- \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} V_1^+ \\ V_2^- \end{pmatrix},$$

avec $V_1^\pm = V^\pm(r_1)$ et $V_2^\pm = V^\pm(r_2)$. Cet opérateur est inversible.

Démonstration. Supposons que l'opérateur ainsi défini est singulier. Il existe V solution de (2.34) telle qu'on ait V_1^+, V_1^- non tous nuls et V_1^+, V_2^- nuls. L'identité d'énergie (2.35) s'écrit alors :

$$r_2^2 \langle V_2^+, DV_2^+ \rangle + r_1^2 \langle V_1^-, DV_1^- \rangle \leq 0.$$

Comme D est strictement positive, le terme de gauche est strictement positif, ce qui est une contradiction. Ceci termine la démonstration. \square

Propriété 2.18. Soit r_1, r_2 deux réels strictement positifs tels que $r_1 < r_2$. Le problème formé de l'équation (2.34) et de la condition de bord :

$$\begin{pmatrix} V^+(r_1) \\ V^-(r_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_*^+ \\ V_*^- \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1}, \quad (2.36)$$

possède une unique solution définie sur $]0, +\infty[$.

Démonstration. C'est une conséquence du fait que le problème formé de (2.34) et de la condition de bord $V(r_1) = V_* \in \mathbb{R}^{N+1}$ possède une unique solution sur $]0, +\infty[$ et du corollaire précédent. \square

Définition 2.5. Soit r_1, r_2 deux réels strictement positifs tels que $r_1 < r_2$. On définit alors les 4 opérateurs $\mathcal{T}_1(r_2, r_1)$, $\mathcal{T}_2(r_2, r_1)$, $\mathcal{R}_1(r_2, r_1)$, $\mathcal{R}_2(r_2, r_1)$ tels que, pour toute solution V de (2.34), on ait :

$$\begin{pmatrix} V_2^+ \\ V_1^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_1(r_2, r_1) & \mathcal{R}_1(r_2, r_1) \\ \mathcal{R}_2(r_2, r_1) & \mathcal{T}_2(r_2, r_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^+ \\ V_2^- \end{pmatrix},$$

avec $V_1^\pm = V^\pm(r_1)$, $V_2^\pm = V^\pm(r_2)$. Les opérateurs $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ d'une part, et $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$, sont respectivement appelés opérateurs de transmissions et opérateurs de réflexion.

Propriété 2.19. Pour tous réels r_1, r_2 strictement positifs tels que $r_1 < r_2$, les matrices de transmission sont inversibles et les matrices de réflexion sont strictement bornées :

$$\|D^{1/2}\mathcal{R}_1(r_2, r_1)D^{-1/2}\| < 1, \quad \|D^{1/2}\mathcal{R}_2(r_2, r_1)D^{-1/2}\| < 1. \quad (2.37)$$

Démonstration. Supposons que $\mathcal{T}_1(r_2, r_1)$ est singulier. Il existe donc X un vecteur non nul tel que $\mathcal{T}_1(r_2, r_1)X = 0$. On a donc :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{T}_1(r_2, r_1) & \mathcal{R}_1(r_2, r_1) \\ \mathcal{R}_2(r_2, r_1) & \mathcal{T}_2(r_2, r_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{R}_2(r_2, r_1)X \end{pmatrix}.$$

On considère alors la solution V de (2.34) avec $V^+(r_1) = X \neq 0$ et $V^-(r_2) = 0$. D'après l'égalité précédente, il vient $V^+(r_2) = 0$. La solution V est donc nulle en r_1 et non nulle en r_2 , ce qui est impossible (par unicité de la solution). On fait de même pour $\mathcal{T}_2(r_2, r_1)$. Supposons à présent que $\|D^{1/2}\mathcal{R}_1(r_2, r_1)D^{-1/2}\| \geq 1$, i.e. il existe un vecteur non nul X tel que :

$$\|D^{1/2}\mathcal{R}_1(r_2, r_1)D^{-1/2}X\| \geq \|X\|.$$

En posant $Y = D^{-1/2}X$, on obtient $\|D^{1/2}\mathcal{R}_1(r_2, r_1)Y\| \geq \|D^{1/2}Y\|$. On considère alors la solution V de (2.34) avec $V^+(r_1) = 0$ et $V^-(r_2) = Y$. L'inégalité d'énergie s'écrit alors :

$$r_2^2\|D^{1/2}\mathcal{R}_1(r_2, r_1)Y\|^2 + r_1^2\|D^{1/2}\mathcal{T}_2(r_2, r_1)Y\|^2 \leq r_2^2\|D^{1/2}Y\|^2 \leq r_2^2\|D^{1/2}\mathcal{R}_1(r_2, r_1)Y\|^2,$$

d'où on tire $r_1^2\|D^{1/2}\mathcal{T}_2(r_2, r_1)Y\|^2 \leq 0$, puis $Y = 0$ car $D^{1/2}\mathcal{T}_2(r_2, r_1)$ est inversible. Ceci est une contradiction avec le fait qu'on ait supposé X non nul. \square

Propriété 2.20. Soit r_1, r_2 deux réels strictement positifs tels que $r_1 < r_2$. L'opérateur $\mathcal{S}(r_2, r_1)$ s'écrit en fonction des matrices de transmission / réflexion avec la formule :

$$\mathcal{S}(r_2, r_1) = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_1(r_2, r_1) - \mathcal{R}_1(r_2, r_1)\mathcal{T}_2^{-1}(r_2, r_1)\mathcal{R}_2(r_2, r_1) & \mathcal{R}_1(r_2, r_1)\mathcal{T}_2^{-1}(r_2, r_1) \\ -\mathcal{T}_2^{-1}(r_2, r_1)\mathcal{R}_2(r_2, r_1) & \mathcal{T}_2^{-1}(r_2, r_1) \end{pmatrix},$$

L'opérateur inverse $\mathcal{S}^{-1}(r_2, r_1) = \mathcal{S}(r_1, r_2)$ s'écrit :

$$\mathcal{S}(r_1, r_2) = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_1^{-1}(r_2, r_1) & -\mathcal{T}_1^{-1}(r_2, r_1)\mathcal{R}_1(r_2, r_1) \\ \mathcal{R}_2(r_2, r_1)\mathcal{T}_1^{-1}(r_2, r_1) & \mathcal{T}_2(r_2, r_1) - \mathcal{R}_2(r_2, r_1)\mathcal{T}_1^{-1}(r_2, r_1)\mathcal{R}_1(r_2, r_1) \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Soit V une solution de (2.34). On a, d'après la définition des matrices de transmission / réflexion :

$$V^+(r_2) = \mathcal{T}_1(r_2, r_1)V^+(r_1) + \mathcal{R}_1(r_2, r_1)V^-(r_2),$$

$$V^-(r_1) = \mathcal{T}_2(r_2, r_1)V^-(r_2) + \mathcal{R}_2(r_2, r_1)V^+(r_1).$$

On obtient la première égalité en exprimant $V^+(r_2)$ et $V^-(r_2)$ en fonction de $V^+(r_1)$ et $V^-(r_1)$. La seconde égalité s'obtient en exprimant $V^+(r_1)$ et $V^-(r_1)$ en fonction de $V^+(r_2)$ et $V^-(r_2)$. \square

Propriété 2.21. Soit r_1, r_2 et r_3 trois réels strictement positifs avec $r_1 < r_2 < r_3$. On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1^3 &= \mathcal{T}_1^2(I - \mathcal{R}_1^1\mathcal{R}_2^2)^{-1}\mathcal{T}_1^1, \\ \mathcal{T}_2^3 &= \mathcal{T}_2^1(I - \mathcal{R}_2^2\mathcal{R}_1^1)^{-1}\mathcal{T}_2^2, \\ \mathcal{R}_1^3 &= \mathcal{R}_1^2 + \mathcal{T}_1^2(I - \mathcal{R}_1^1\mathcal{R}_2^2)^{-1}\mathcal{R}_1^1\mathcal{T}_2^2, \\ \mathcal{R}_2^3 &= \mathcal{R}_2^1 + \mathcal{T}_2^1(I - \mathcal{R}_2^2\mathcal{R}_1^1)^{-1}\mathcal{R}_2^2\mathcal{T}_1^1, \end{aligned}$$

où les exposants 1, 2 et 3 désignent respectivement les intervalles $[r_1, r_2]$, $[r_2, r_3]$ et $[r_1, r_3]$. Les matrices $(I - \mathcal{R}_1^1\mathcal{R}_2^2)$ et $(I - \mathcal{R}_2^2\mathcal{R}_1^1)$ sont bien inversibles grâce à (2.37).

Démonstration. En remarquant que $\mathcal{S}(r_3, r_1) = \mathcal{S}(r_3, r_2)\mathcal{S}(r_2, r_1)$ et utilisant l'expression de \mathcal{S} en fonction des matrices de transmission / réflexion, il vient le résultat. \square

Propriété 2.22. Dans le cas où $a = 1$, on a les identités suivantes :

$$(r_2^2 \mathcal{T}_1(r_2, r_1) + r_1^2 \mathcal{R}_2(r_2, r_1))^t z = r_1^2 z, \quad (r_1^2 \mathcal{T}_2(r_2, r_1) + r_2^2 \mathcal{R}_1(r_2, r_1))^t z = r_2^2 z,$$

avec $z = (\sqrt{\omega_1} \mu_1, \dots, \sqrt{\omega_q} \mu_q)^t$ ($q = (L + 1)/2$) et $((\mu_1, \omega_1), \dots, (\mu_q, \omega_q))$ la famille des couples points/poids de la quadrature de Gauss-Legendre.

Démonstration. Soit V une solution de (2.34) avec $a = 1$. En notant $j = \langle z, V^+ \rangle - \langle z, V^- \rangle$, on a $\frac{d(r^2 j)}{dr} = 0$. En intégrant pour r variant de r_1 à r_2 :

$$r_2^2 \langle z, V_2^+ \rangle + r_1^2 \langle z, V_1^- \rangle = r_1^2 \langle z, V_1^+ \rangle + r_2^2 \langle z, V_2^- \rangle,$$

puis en utilisant les expressions de V_2^+ et V_1^+ en fonction des matrices de transmission / réflexion, il vient :

$$\begin{aligned} r_2^2 \langle z, \mathcal{T}_1(r_2, r_1) V_1^+ + \mathcal{R}_1(r_2, r_1) V_2^- \rangle + r_1^2 \langle z, \mathcal{R}_2(r_2, r_1) V_1^+ + \mathcal{T}_2(r_2, r_1) V_2^- \rangle \\ = r_1^2 \langle z, V_1^+ \rangle + r_2^2 \langle z, V_2^- \rangle, \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est valable quels que soient V_1^+ et V_2^- dans $\mathbb{R}^{(N+1)/2}$ ce qui termine la démonstration. \square

2.5 Discrétisation des modèles P_N et analyse numérique

Dans cette section, notre objectif est de construire une discrétisation du modèle P_N (2.20) dans le cas où la source de photons est nulle, *i.e.* $q = 0$. Le système à discrétiser s'écrit :

$$\frac{1}{c} \partial_t U + A \partial_r U + \frac{1}{r} G U = -\sigma(U - a J U), \quad t > 0, \quad r \in \Omega, \quad (2.38)$$

où $U : [0, +\infty[\times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ est la fonction inconnue. Pour rappel, A , J et G sont des matrices réelles de taille $(N + 1) \times (N + 1)$. La matrice A est symétrique, J est symétrique positive et la partie symétrique de G vaut A . On considère uniquement le cas où N est impair si bien que A soit inversible. Dans ce cas, A s'écrit sous la forme $R \Lambda R^t$ avec $\Lambda = \text{diag}(D, -D)$ où D est une matrice diagonale strictement positive et R une matrice orthogonale. Les quantités a et σ sont des fonctions de la variable r telles que σ soit positive et a comprise entre 0 et 1. Dans le but de construire une discrétisation capturant exactement les états stationnaires de (2.38), on réécrit, à l'aide des résultats précédents, le système sous la forme d'un système de lois de conservation :

$$\frac{1}{c} \partial_t W + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 F(r, W)) = 0, \quad (2.39)$$

avec $W = \mathcal{P}^t(r, r_0) U$ et $F(r, W) = \mathcal{Q}(r, r_0) W$ où $\mathcal{Q}(r, r_0) = \mathcal{P}^t(r, r_0) A \mathcal{P}^{-t}(r, r_0)$ est semblable à A . Ici, \mathcal{P} désigne la résolvante du problème stationnaire adjoint à l'équation

(2.38) et r_0 est une constante strictement positive choisie arbitrairement. On remarque de plus que si W est solution de l'équation précédente, alors on a :

$$\frac{1}{c} \partial_t(r^2 F(r, W)) + \mathcal{Q}(r, r_0) \partial_r(r^2 F(r, W)) = 0.$$

On adopte alors une approche volumes finis qui s'écrit de manière standard :

$$\frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{c \Delta t} + \frac{(r^2 F)_{i+1/2}^{n+1/2} - (r^2 F)_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta \mathcal{V}_i} = 0, \quad (2.40)$$

avec $\Delta \mathcal{V}_i = \frac{1}{3}(r_{i+1/2}^3 - r_{i-1/2}^3)$ le volume de maille et Δt le pas de temps. Il reste à approcher les flux à chaque interface. On note r_* une interface particulière et r_D, r_G respectivement les centres de maille à droite et à gauche de cette interface. On adopte une approximation à la manière d'un schéma de Godunov, *i.e.* on résout exactement à l'interface r_* le problème suivant :

$$\frac{1}{c} \partial_t(r^2 F(r, W)) + \tilde{\mathcal{Q}}(r, r_0) \partial_r(r^2 F(r, W)) = 0, \quad (2.41)$$

avec :

$$\tilde{\mathcal{Q}}(r, r_0) = \begin{cases} \mathcal{Q}(r_G, r_0), & r < r_*, \\ \mathcal{Q}(r_D, r_0), & r \geq r_*, \end{cases}, \quad (r^2 F)(0, r) = \begin{cases} r_G^2 F_G, & r < r_*, \\ r_D^2 F_D, & r \geq r_*. \end{cases} \quad (2.42)$$

On a alors le résultat suivant.

Propriété 2.23. La solution du problème (2.41) + (2.42) en $r = r_*$, que l'on note $(r^2 F)_*$, vérifie le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \langle s_\ell^G, (r^2 F)_* \rangle = \langle s_\ell^G, r_G^2 F_G \rangle, & \mu_\ell > 0, \\ \langle s_\ell^D, (r^2 F)_* \rangle = \langle s_\ell^D, r_D^2 F_D \rangle, & \mu_\ell < 0, \end{cases} \quad (2.43)$$

où, pour tout $\ell \in \{0, \dots, L\}$, on désigne par s_ℓ^G (respectivement s_ℓ^D) un vecteur propre à gauche de $\mathcal{Q}(r_G, r_0)$ (respectivement $\mathcal{Q}(r_D, r_0)$) associé à la valeur propre μ_ℓ de A .

Démonstration. Supposons dans un premier temps que la matrice \mathcal{Q} soit constante. Comme la matrice \mathcal{Q} est semblable à A , elle possède les mêmes valeurs propres. Soit μ une de ces valeurs propres et s un vecteur propre associé. On a alors l'équation suivante :

$$\frac{1}{c} \partial_t(\langle s, r^2 F(r, W) \rangle) + \mu \partial_r(\langle s, r^2 F(r, W) \rangle) = 0.$$

La quantité $\langle s, r^2 F(r, W) \rangle$ est donc transportée à la vitesse μ . Ainsi, si μ est positif (respectivement négatif), la valeur de $r^2 F(r, W)$ à l'interface r_* vaut $r_G^2 F(r_G, W_G)$ (respectivement $r_D^2 F(r_D, W_D)$). Lorsque \mathcal{Q} est constante par morceaux, le résultat s'étend aisément et on obtient le résultat. \square

Propriété 2.24. Le système (2.43) est inversible et la solution s'écrit :

$$(r^2 F)_* = [I^+ R^t \mathcal{P}^{-t}(r_G, r_0) + I^- R^t \mathcal{P}^{-t}(r_D, r_0)]^{-1} [r_G^2 I^+ R^t A \mathcal{P}^{-t}(r_G, r_0) W_G + r_D^2 I^- R^t A \mathcal{P}^{-t}(r_D, r_0) W_D]. \quad (2.44)$$

avec $I^\pm = \text{diag} \left(\frac{\lambda_k \pm |\lambda_k|}{2}, k = 0, \dots, N \right)$.

Démonstration. La preuve est une adaptation de celle de ([DB15]). \square

Le schéma (2.40) est à présent entièrement défini. On préfère néanmoins le réécrire en utilisant les variables initiales $U = \mathcal{P}(r, r_0)^{-t} W$, et on a :

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{c\Delta t} + \frac{(r^2 F_D)_{i+1/2}^{n+1/2} - (r^2 F_G)_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta \mathcal{V}_i} = 0, \quad (2.45)$$

avec :

$$(r^2 F_D)_{i+1/2} = [RI^+ R^t + RI^- R^t \mathcal{P}^{-t}(r_{i+1}, r_i)]^{-1} [r_i^2 A^+ U_i^n + r_{i+1}^2 A^- U_{i+1}^n], \quad (2.46)$$

$$(r^2 F_G)_{i+1/2} = [RI^+ R^t \mathcal{P}^{-t}(r_i, r_{i+1}) + RI^- R^t]^{-1} [r_i^2 A^+ U_i^n + r_{i+1}^2 A^- U_{i+1}^n]. \quad (2.47)$$

On étudie à présent les propriétés du schéma. En particulier, on s'intéresse aux propriétés vérifiées par les solutions du modèle P_N continu (2.20) : la stabilité en norme L^2 des solutions, la conservation de l'énergie lorsque $a = 1$ et enfin, le comportement dans la limite diffusion. On commence par réécrire le schéma sous une forme plus commode à étudier. Pour cela, on utilise la propriété suivante.

Propriété 2.25. Soit r_1, r_2 deux réels strictement positifs. On a l'égalité suivante :

$$r_2^2 \mathcal{P}^t(r_2, r_1) A R \mathcal{S}(r_2, r_1) R^t = r_1^2 A, \quad (2.48)$$

où \mathcal{S} désigne la résolvante du modèle P_N stationnaire sous forme diagonalisée.

Propriété 2.26. Le schéma (2.45) se réécrit sous la forme équivalente :

$$\begin{cases} \frac{(V^+)_i^{n+1} - (V^+)_i^n}{\Delta t} + \frac{cr_i^2 D}{\Delta \mathcal{V}_i} [(V^+)_i^n - \mathcal{T}_1(r_i, r_{i-1})(V^+)_{i-1}^n - \mathcal{R}_1(r_i, r_{i-1})(V^-)_i^n] = 0, \\ \frac{(V^-)_i^{n+1} - (V^-)_i^n}{\Delta t} - \frac{r_i^2 c D}{\Delta \mathcal{V}_i} [\mathcal{R}_2(r_{i+1}, r_i)(V^+)_i^n + \mathcal{T}_2(r_{i+1}, r_i)(V^-)_{i+1}^n - (V^-)_i^n] = 0, \end{cases} \quad (2.49)$$

où $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{R}_1$ et \mathcal{R}_2 sont les matrices de transmission / réflexion définies dans la section précédente.

Démonstration. Partant de l'expression du schéma (2.45), on obtient l'expression suivante en multipliant par R^t :

$$\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{c\Delta t} + \frac{R^t(r^2 F_D)_{i+1/2}^{n+1/2} - R^t(r^2 F_G)_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta \mathcal{V}_i} = 0.$$

Le flux $R^t(r^2 F_D)_{i+1/2}$ vaut alors :

$$\begin{aligned} (r^2 F_D)_{i+1/2}^{n+1/2} &= R^t[RI^+ R^t + RI^- R^t \mathcal{P}^{-t}(r_{i+1}, r_i)]^{-1} [r_i^2 R \Lambda^+ V_i^n + r_{i+1}^2 R \Lambda^- V_{i+1}^n] \\ &= [I^+ + I^- R^t \mathcal{P}^{-t}(r_{i+1}, r_i) R]^{-1} [r_i^2 \Lambda^+ V_i^n + r_{i+1}^2 \Lambda^- V_{i+1}^n]. \end{aligned}$$

En utilisant la relation (2.48), il vient :

$$(r^2 F_D)_{i+1/2}^{n+1/2} = r_i^2 \Lambda [r_i^2 I^+ + r_{i+1}^2 I^- \mathcal{S}(r_{i+1}, r_i)]^{-1} \begin{pmatrix} r_i^2 (V^+)_i^n \\ r_{i+1}^2 (V^-)_{i+1}^n \end{pmatrix}.$$

La matrice inversée s'exprime explicitement à l'aide des matrices de transmission / réflexion :

$$\begin{aligned} [r_i^2 I^+ + r_{i+1}^2 I^- \mathcal{S}(r_{i+1}, r_i)]^{-1} &= \begin{pmatrix} r_i^2 I & 0 \\ -r_{i+1}^2 \mathcal{T}_2^{-1}(r_{i+1}, r_i) \mathcal{R}_2(r_{i+1}, r_i) & r_{i+1}^2 \mathcal{T}_2^{-1}(r_{i+1}, r_i) \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} (1/r_i^2) I & 0 \\ (1/r_i^2) \mathcal{R}_2(r_{i+1}, r_i) & (1/r_{i+1}^2) \mathcal{T}_2(r_{i+1}, r_i) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En effectuant un calcul similaire pour $(r^2 F_G)_{i+1/2}^{n+1/2}$, il vient le résultat. \square

Propriété 2.27. Le schéma (2.49) préserve les états d'équilibre du modèle P_N . Soit V une solution de (2.34). Si $V_i^n = V(r_i)$ pour tout i , alors $V_i^{n+1} = V_i^n$ pour tout i .

Démonstration. Si pour tout i , on a $V_i^n = V(r_i)$ où V est solution de (2.34), alors on a pour tout i :

$$\begin{aligned} (V^+)_i^n &= \mathcal{T}_1(r_i, r_{i-1})(V^+)_{i-1}^n + \mathcal{R}_1(r_i, r_{i-1})(V^-)_i^n, \\ (V^-)_i^n &= \mathcal{R}_2(r_{i+1}, r_i)(V^+)_{i+1}^n + \mathcal{T}_2(r_{i+1}, r_i)(V^-)_{i+1}^n, \end{aligned}$$

si bien que les flux sont nuls. \square

Propriété 2.28. Le schéma (2.49) est stable L^2 sous la condition CFL :

$$0 \leq \frac{c\lambda_{\max} r_i^2 \Delta t}{\Delta \mathcal{V}_i} \leq 1, \quad (2.50)$$

où λ_{\max} représente la valeur propre maximale de D . On a l'inégalité suivante :

$$\sum_i \Delta \mathcal{V}_i S_i^{n+1} \leq \sum_i \Delta \mathcal{V}_i S_i^n,$$

avec $S_i^{n+1} = \langle (V^+)_i^n, (V^+)_i^n \rangle + \langle (V^-)_i^n, (V^-)_i^n \rangle$.

Démonstration. Pour alléger les notations, on note :

$$(\hat{V}^+)_i^n = \mathcal{T}_1(r_i, r_{i-1})(V^+)_i^n + \mathcal{R}_1(r_i, r_{i-1})(V^-)_i^n.$$

$$(\hat{V}^-)_i^n = \mathcal{R}_2(r_{i+1}, r_i)(V^+)_i^n + \mathcal{T}_2(r_{i+1}, r_i)(V^-)_i^n.$$

En posant $\nu_i = r_i^2 c \Delta t / \Delta \mathcal{V}_i$, le schéma s'écrit :

$$(V^+)_i^{n+1} = (V^+)_i^n - \nu_i D[(V^+)_i^n - (\hat{V}^+)_i^n],$$

$$(V^-)_i^{n+1} = (V^-)_i^n + \nu_i D[(\hat{V}^-)_i^n - (V^-)_i^n].$$

On a :

$$\begin{aligned} \langle (V^+)_i^{n+1}, (V^+)_i^{n+1} \rangle &= \langle (V^+)_i^n, (V^+)_i^n \rangle \\ &\quad - 2\nu_i \langle (V^+)_i^n, D[(V^+)_i^n - (\hat{V}^+)_i^n] \rangle \\ &\quad + \nu_i^2 \langle D[(V^+)_i^n - (\hat{V}^+)_i^n], D[(V^+)_i^n - (\hat{V}^+)_i^n] \rangle \\ &= \langle (V^+)_i^n, (V^+)_i^n \rangle \\ &\quad - \nu_i \langle (V^+)_i^n + (\hat{V}^+)_i^n, D[(V^+)_i^n - (\hat{V}^+)_i^n] \rangle \\ &\quad - \langle (V^+)_i^n - (\hat{V}^+)_i^n, \nu_i D(I - \nu_i D)[(V^+)_i^n - (\hat{V}^+)_i^n] \rangle. \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} \langle (V^+)_i^{n+1}, (V^+)_i^{n+1} \rangle &= \langle (V^+)_i^n, (V^+)_i^n \rangle \\ &\quad - \nu_i [\langle (V^+)_i^n, D(V^+)_i^n \rangle - \langle (\hat{V}^+)_i^n, D(\hat{V}^+)_i^n \rangle] \\ &\quad - \langle (V^+)_i^n - (\hat{V}^+)_i^n, \nu_i D(I - \nu_i D)[(V^+)_i^n - (\hat{V}^+)_i^n] \rangle. \end{aligned}$$

De la même manière, on a :

$$\begin{aligned} \langle (V^-)_i^{n+1}, (V^-)_i^{n+1} \rangle &= \langle (V^-)_i^n, (V^-)_i^n \rangle \\ &\quad + \nu_i [\langle (\hat{V}^-)_i^n, D(\hat{V}^-)_i^n \rangle - \langle (V^-)_i^n, D(V^-)_i^n \rangle] \\ &\quad - \langle (\hat{V}^-)_i^n - (V^-)_i^n, \nu_i D(I - \nu_i D)[(\hat{V}^-)_i^n - (V^-)_i^n] \rangle. \end{aligned}$$

Sous la condition $0 \leq \nu_i \lambda_{\max} \leq 1$, les derniers termes de ces deux égalités sont toujours négatifs. On a alors :

$$\begin{aligned} S_i^{n+1} &= S_i^n - \nu_i [\langle (V^+)_i^n, D(V^+)_i^n \rangle + \langle (V^-)_i^n, D(V^-)_i^n \rangle \\ &\quad - \langle (\hat{V}^+)_i^n, D(\hat{V}^+)_i^n \rangle - \langle (\hat{V}^-)_i^n, D(\hat{V}^-)_i^n \rangle] + R_i^n, \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} S_i^n &= \langle (V^+)_i^n, (V^+)_i^n \rangle + \langle (V^-)_i^n, (V^-)_i^n \rangle, \\ R_i^n &= -\langle (\hat{V}^-)_i^n - (V^-)_i^n, \nu_i D(I - \nu_i D)[(\hat{V}^-)_i^n - (V^-)_i^n] \rangle \\ &\quad - \langle (V^+)_i^n - (\hat{V}^+)_i^n, \nu_i D(I - \nu_i D)[(V^+)_i^n - (\hat{V}^+)_i^n] \rangle. \end{aligned}$$

Ce dernier terme est négatif sous la condition $0 \leq \nu_i \lambda_{\max} \leq 1$. En définissant :

$$Q_{i+1/2}^n = r_i^2 \langle (V^+)_i^n, D(V^+)_i^n \rangle - r_i^2 \langle (\hat{V}^-)_i^n, D(\hat{V}^-)_i^n \rangle,$$

on obtient :

$$S_i^{n+1} = S_i^n - \frac{c\Delta t}{\Delta \mathcal{V}_i} [Q_{i+1/2}^n - Q_{i-1/2}^n] + R_i^n + W_i^n,$$

avec :

$$W_i^n = -\frac{c\Delta t}{\Delta \mathcal{V}_i} [r_{i-1}^2 \langle (V^+)_{i-1}^n, D(V^+)_{i-1}^n \rangle + r_i^2 \langle (V^-)_i^n, D(V^-)_i^n \rangle \\ - r_{i-1}^2 \langle (\hat{V}^-)_{i-1}^n, D(\hat{V}^-)_{i-1}^n \rangle - r_i^2 \langle (\hat{V}^+)_i^n, D(\hat{V}^+)_i^n \rangle]$$

Le reste W_i^n est négatif compte tenu de l'inégalité d'énergie (2.35). \square

Propriété 2.29. Dans le cas $a = 1$, le schéma (2.49) conserve l'énergie.

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} + \frac{(r^2 j)_{i+1/2}^{n+1/2} - (r^2 j)_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta \mathcal{V}_i} = 0, \quad (2.51)$$

avec :

$$\rho_i^n = \langle (V^+)_i^n, \sqrt{\omega} \rangle + \langle (V^-)_i^n, \sqrt{\omega} \rangle, \quad (2.52)$$

$$(r^2 j)_{i+1/2}^{n+1/2} = r_{i+1}^2 \langle z, \mathcal{T}_1(r_{i+1}, r_i)(V^+)_i^n \rangle - r_i^2 \langle z, \mathcal{T}_2(r_{i+1}, r_i)(V^-)_{i+1}^n \rangle. \quad (2.53)$$

Démonstration. En posant $\rho = \langle V^+, \sqrt{\omega} \rangle + \langle V^-, \sqrt{\omega} \rangle$, on a :

$$\frac{1}{c} \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} + \frac{r_i^2 \langle z, (V^+)_i - \mathcal{T}_1(r_i, r_{i-1})(V^+)_{i-1}^n - \mathcal{R}_1(r_i, r_{i-1})(V^-)_i^n \rangle}{\Delta \mathcal{V}_i} \\ - \frac{r_i^2 \langle z, \mathcal{R}_2(r_{i+1}, r_i)(V^+)_i + \mathcal{T}_2(r_{i+1}, r_i)(V^-)_{i+1}^n - (V^-)_i^n \rangle}{\Delta \mathcal{V}_i} = 0.$$

On peut réécrire cette expression :

$$\frac{1}{c} \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} + \frac{\langle r_i^2 z - r_i^2 \mathcal{R}_2^t(r_{i+1}, r_i)z, (V^+)_i^n \rangle}{\Delta \mathcal{V}_i} \\ - \frac{\langle r_i^2 \mathcal{T}_2^t(r_{i+1}, r_i)z, (V^-)_{i+1}^n \rangle}{\Delta \mathcal{V}_i} \\ - \frac{\langle r_i^2 \mathcal{T}_1^t(r_i, r_{i-1})z, (V^+)_{i-1}^n \rangle}{\Delta \mathcal{V}_i} \\ + \frac{\langle r_i^2 z - r_i^2 \mathcal{R}_1^t(r_i, r_{i-1})z, (V^-)_i^n \rangle}{\Delta \mathcal{V}_i} = 0.$$

Comme $a = 1$, on a les deux égalités :

$$(r_{i+1}^2 \mathcal{T}_1(r_{i+1}, r_i) + r_i^2 \mathcal{R}_2(r_{i+1}, r_i))^t z = r_i^2 z,$$

$$(r_i^2 \mathcal{T}_2(r_{i+1}, r_i) + r_{i+1}^2 \mathcal{R}_1(r_{i+1}, r_i))^t z = r_{i+1}^2 z,$$

on obtient la loi de conservation :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} + \frac{\langle r_{i+1}^2 \mathcal{T}_1^t(r_{i+1}, r_i) z, (V^+)_i^n \rangle}{\Delta \mathcal{V}_i} \\ & - \frac{\langle r_i^2 \mathcal{T}_2^t(r_{i+1}, r_i) z, (V^-)_{i+1}^n \rangle}{\Delta \mathcal{V}_i} \\ & - \frac{\langle r_i^2 \mathcal{T}_1^t(r_i, r_{i-1}) z, (V^+)_{i-1}^n \rangle}{\Delta \mathcal{V}_i} \\ & + \frac{\langle r_{i-1}^2 \mathcal{T}_2^t(r_i, r_{i-1}) z, (V^-)_i^n \rangle}{\Delta \mathcal{V}_i} = 0, \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. \square

On termine cette section par étudier le comportement du schéma en limite diffusion ($a = 1$), voir définition 2.1, dans le cas P_1 . En écrivant le schéma P_1 en les variables (E, F) , on obtient :

$$\begin{cases} \frac{E_i^{n+1} - E_i^n}{\Delta t} + \frac{r_{i+1/2}^2 F_{i+1/2}^{n+1/2} - r_{i-1/2}^2 F_{i-1/2}^{n+1/2}}{r_i^2 \Delta r_i} = 0, \\ \frac{F_i^{n+1} - F_i^n}{\Delta t} + \frac{c^2}{3} \frac{E_{i+1/2}^{n+1/2} - E_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta r_i} = \frac{S_i^{n+1/2}}{\Delta r_i}, \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned} E_{i+1/2}^{n+1/2} &= \chi_{i+1/2} \left[\frac{r_{i+1}^2 E_{i+1}^n + r_i^2 E_i^n}{r_i^2 + r_{i+1}^2} - \frac{\sqrt{3}}{c} \frac{r_{i+1}^2 F_{i+1}^n - r_i^2 F_i^n}{r_i^2 + r_{i+1}^2} \right], \\ F_{i+1/2}^{n+1/2} &= \chi_{i+1/2} \left[\frac{F_{i+1}^n + F_i^n}{2} - \frac{c}{\sqrt{3}} \frac{E_{i+1}^n - E_i^n}{2} \right] \\ \chi_{i+1/2} &= \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2} r_{i+1/2}^2 \int_{r_L}^{r_R} \frac{\sigma(s)}{s^2} ds}, \\ S_i^{n+1/2} &= -\frac{c}{\sqrt{3}} (1 - \chi_{i+1/2}) (F_i + \frac{c}{\sqrt{3}} E_i) \\ &\quad - \frac{c}{\sqrt{3}} (1 - \chi_{i-1/2}) (F_i - \frac{c}{\sqrt{3}} E_i), \end{aligned}$$

et $r_{i+1/2}^2 = \frac{2r_i^2 r_{i+1}^2}{r_i^2 + r_{i+1}^2}$ et où l'on a utilisé le volume de maille approché $\Delta \mathcal{V}_i = r_i^2 \Delta r_i$. Si σ est constant par maille, on a :

$$r_{i+1/2}^2 \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{\sigma(s)}{s^2} ds = \sigma_i \Delta r_i^+ + \sigma_{i+1} \Delta r_{i+1}^-,$$

avec $\Delta r_i^\pm = \pm r_{i\pm 1/2}^2 (\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i\pm 1/2}})$. On étudie à présent le comportement asymptotique du schéma dans la limite de diffusion, c'est-à-dire, la limite quand ϵ tend vers 0 du schéma

adimensionné suivant :

$$\begin{cases} \frac{E_i^{n+1} - E_i^n}{\Delta t} + \frac{r_{i+1/2}^2 F_{i+1/2}^{n+1/2} - r_{i-1/2}^2 F_{i-1/2}^{n+1/2}}{\epsilon r_i^2 \Delta r_i} = 0, \\ \frac{F_i^{n+1} - F_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{3} \frac{E_{i+1/2}^{n+1/2} - E_{i-1/2}^{n+1/2}}{\epsilon \Delta r_i} = \frac{S_i^{n+1/2}}{\epsilon^2 \Delta r_i}. \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned} E_{i+1/2}^{n+1/2} &= \chi_{i+1/2} \left[\frac{r_{i+1}^2 E_{i+1}^n + r_i^2 E_i^n}{r_i^2 + r_{i+1}^2} - \sqrt{3} \frac{r_{i+1}^2 F_{i+1}^n - r_i^2 F_i^n}{r_i^2 + r_{i+1}^2} \right], \\ F_{i+1/2}^{n+1/2} &= \chi_{i+1/2} \left[\frac{F_{i+1}^n + F_i^n}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{E_{i+1}^n - E_i^n}{2} \right], \\ \chi_{i+1/2} &= \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2\epsilon} (\sigma_i \Delta r_i^+ + \sigma_{i+1} \Delta r_{i+1}^-)}, \\ S_i^{n+1/2} &= -\frac{1}{2} (\sigma_i \Delta r_i^+ + \sigma_{i+1} \Delta r_{i+1}^-) \chi_{i+1/2} (F_i + \frac{1}{\sqrt{3}} E_i) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\sigma_{i-1} \Delta r_{i-1}^+ + \sigma_i \Delta r_i^-) \chi_{i-1/2} (F_i - \frac{1}{\sqrt{3}} E_i). \end{aligned}$$

En identifiant les termes d'ordre 0 dans la première équation, on obtient :

$$\left. \frac{E_i^{n+1} - E_i^n}{\Delta t} \right|_0 + \left. \frac{r_{i+1/2}^2 F_{i+1/2}^{n+1/2} - r_{i-1/2}^2 F_{i-1/2}^{n+1/2}}{r_i^2 \Delta r_i} \right|_1 = 0.$$

Le terme d'ordre 1 dans l'expression de $F_{i+1/2}^{n+1/2}$ vaut :

$$\left. F_{i+1/2}^{n+1/2} \right|_1 = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_i \Delta r_i^+ + \sigma_{i+1} \Delta r_{i+1}^-)} \left[\frac{F_{i+1}^n + F_i^n}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{E_{i+1}^n - E_i^n}{2} \right]_0.$$

En identifiant les termes d'ordre -1 dans la seconde équation, on obtient :

$$F_i^n|_0 = 0.$$

Finalement, on a :

$$\left. F_{i+1/2}^{n+1/2} \right|_1 = -\frac{1}{3(\sigma_i \Delta r_i^+ + \sigma_{i+1} \Delta r_{i+1}^-)} (E_{i+1}^n - E_i^n)_0.$$

L'équation de diffusion discrète s'écrit alors :

$$\left. \frac{E_i^{n+1} - E_i^n}{\Delta t} \right|_0 - \frac{1}{r_i^2 \Delta r_i} \left[\frac{r_{i+1/2}^2}{3\sigma_{i+1/2}} \frac{E_{i+1}^n - E_i^n}{\Delta r_i^+ + \Delta r_{i+1}^-} - \frac{r_{i-1/2}^2}{3\sigma_{i-1/2}} \frac{E_i^n - E_{i-1}^n}{\Delta r_{i-1}^+ + \Delta r_i^-} \right]_0 = 0,$$

avec :

$$\sigma_{i+1/2} = \frac{\sigma_i \Delta r_i^+ + \sigma_{i+1} \Delta r_{i+1}^-}{\Delta r_i^+ + \Delta r_{i+1}^-}.$$

Cette équation est bien consistante avec l'équation de diffusion (2.10).

2.6 Approximations des états stationnaires

Le schéma (2.45) nécessite de connaître l'expression analytique des états stationnaires de l'équation adjointe au modèle P_N (2.29), représentés par l'opérateur \mathcal{P} , pour être utilisé en pratique. On possède cette formule analytique dans quelques cas simples. Par exemple, dans le cas P_1 et $a = 1$, on a vu que :

$$\mathcal{P}(r_2, r_1) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3\bar{\sigma}}{c}(r_2 - r_1)(r_1/r_2) \\ 0 & r_1^2/r_2^2 \end{pmatrix}$$

pour tous r_1, r_2 réels strictement positifs. De même, dans le cas où σ est nul, on a l'expression suivante :

$$\mathcal{P}(r_2, r_1) = \exp \left[-\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) A^{-1}G \right],$$

pour tous r_1, r_2 réels strictement positifs. Dans les deux cas ci-dessus, on peut donc directement implémenter le schéma (2.45) sans difficulté. Dans le cas général, l'opérateur \mathcal{P} est défini à partir d'un ensemble fondamental de solutions de l'équation :

$$A \frac{dU}{dr} + \frac{1}{r}GU = \sigma(U - aJU). \quad (2.54)$$

Les solutions de cette équation ne s'expriment pas simplement à l'aide d'une exponentielle de matrice car les opérateurs $A^{-1}G$, A^{-1} et $A^{-1}J$ ne commutent pas deux à deux. L'idée est alors d'approcher la matrice \mathcal{P} . On expose dans cette section 3 méthodes d'approximation de l'opérateur \mathcal{P} : la séparation d'opérateurs, le développement en série de Magnus et la discrétisation directe. L'approximation par séparation d'opérateur consiste à exprimer l'opérateur \mathcal{P} à l'aide des deux opérateurs $\mathcal{P}_{\text{sphe}}$ et $\mathcal{P}_{\text{emi/abs}}$ définis d'une part par :

$$\begin{cases} A \frac{d\mathcal{P}_{\text{sphe}}(r, r_*)}{dr} + \frac{1}{r}G\mathcal{P}_{\text{sphe}}(r, r_*) = 0, \\ \mathcal{P}_{\text{sphe}}(r_*, r_*) = I, \end{cases}$$

et d'autre part :

$$\begin{cases} A \frac{d\mathcal{P}_{\text{emi/abs}}(r, r_*)}{dr} = \sigma[\mathcal{P}_{\text{emi/abs}}(r, r_*) - aJ\mathcal{P}_{\text{emi/abs}}(r, r_*)], \\ \mathcal{P}_{\text{emi/abs}}(r_*, r_*) = I. \end{cases}$$

On a alors :

$$\mathcal{P}_{\text{sphe}}(r_2, r_1) = \exp \left[-\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) A^{-1}G \right],$$

et lorsque σ et a sont constants :

$$\mathcal{P}_{\text{emi/abs}}(r_2, r_1) = \exp[\sigma(r_2 - r_1)A^{-1}(I - aJ)],$$

quels que soient r_1, r_2 des réels strictement positifs. À ce stade, on définit plusieurs sortes de splittings. Premièrement, il y a le splitting de Lie, dont il existe deux versions différentes :

$$\mathcal{P}_{\text{lie1}}(r_2, r_1) = \mathcal{P}_{\text{emi/abs}}(r_2, r_1) \mathcal{P}_{\text{sphe}}(r_2, r_1),$$

$$\mathcal{P}_{\text{lie2}}(r_2, r_1) = \mathcal{P}_{\text{sphe}}(r_2, r_1) \mathcal{P}_{\text{emi/abs}}(r_2, r_1).$$

Ces deux approximations sont d'ordre 1 par rapport à $r_2 - r_1$. On a ensuite les splittings d'ordre 2 suivants, définis par :

$$\mathcal{P}_{\text{lie12}}(r_2, r_1) = \frac{\mathcal{P}_{\text{lie1}}(r_2, r_1) + \mathcal{P}_{\text{lie2}}(r_2, r_1)}{2}.$$

$$\mathcal{P}_{\text{strang1}}(r_2, r_1) = \mathcal{P}_{\text{sphe}}(r_2, r_m) \mathcal{P}_{\text{emi/abs}}(r_2, r_1) \mathcal{P}_{\text{sphe}}(r_m, r_1),$$

$$\mathcal{P}_{\text{strang2}}(r_2, r_1) = \mathcal{P}_{\text{emi/abs}}(r_2, r_m) \mathcal{P}_{\text{sphe}}(r_2, r_1) \mathcal{P}_{\text{emi/abs}}(r_m, r_1),$$

avec r_m la moyenne arithmétique de r_1 et r_2 .

La deuxième méthode d'approximation est basée sur le développement en série de Magnus. Ce développement est utilisé pour résoudre analytiquement les systèmes d'équations différentielles ordinaires de la forme $Y'(t) = A(t)Y(x)$. La solution de ce système avec la condition $Y(t_0) = Y_0$ s'écrit à l'aide de la série de Magnus :

$$Y(t) = \exp(\Omega(t, t_0))Y_0, \quad \Omega(t, t_0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \Omega_k(t, t_0).$$

La série $\Omega(t, t_0)$ est appelée série de Magnus et est définie par :

$$\Omega_1(t, t_0) = \int_{t_0}^t A(t_1) dt_1, \quad \Omega_2(t, t_0) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 [A(t_1), A(t_2)],$$

$$\Omega_3(t, t_0) = \frac{1}{6} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_3} dt_3 ([A(t_1), [A(t_2), A(t_3)]] + [A(t_3), [A(t_2), A(t_1)]]),$$

et ainsi de suite. On a noté $[A, B] = AB - BA$ le commutateur de A et B . En appliquant ce résultat au cas du système (2.54), on peut approcher l'opérateur \mathcal{P} en tronquant la série de Magnus aux premiers termes.

La dernière méthode d'approximation consiste à approcher les matrices de transmission / réflexion en discrétisant directement le système suivant :

$$\begin{cases} D \frac{dV^+}{dr} + \frac{1}{r} [(D + G_1)V^+ + G_2V^-] = -\sigma [V^+ - a\sqrt{\omega} \otimes \sqrt{\omega} (V^+ + V^-)], \\ -D \frac{dV^-}{dr} + \frac{1}{r} [G_3 - (D - G_4)V^-] = -\sigma [V^- - a\sqrt{\omega} \otimes \sqrt{\omega} (V^+ + V^-)], \end{cases}$$

L'objectif est de construire une discrétisation de ce système tout en préservant les propriétés 2.17 et 2.22 au niveau discret afin de garantir la conservation de l'énergie et la stabilité en norme L^2 sous CFL du schéma décrit précédemment. On considère ici que σ

et a sont constants. On commence par réécrire les termes de dérive en espace en utilisant l'égalité suivante :

$$D \frac{dV^\pm}{dr} + \frac{1}{r} DV^\pm = \frac{1}{r} \frac{d(rDV^\pm)}{dr}.$$

Puis, on discrétise de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{r_{i+1}DV_{i+1}^+ - r_iDV_i^+}{\Delta r_i} + G_1 \frac{r_iV_i^+ + r_{i+1}V_{i+1}^+}{r_i + r_{i+1}} + G_2 \frac{r_iV_i^- + r_{i+1}V_{i+1}^-}{r_i + r_{i+1}} \\ &= -\sigma[r_{i+1}V_{i+1}^+ - a\sqrt{\omega} \otimes \sqrt{\omega}(r_{i+1}V_{i+1}^+ + r_iV_i^-)], \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & -\frac{r_{i+1}DV_{i+1}^- - r_iDV_i^-}{\Delta r_i} + G_3 \frac{r_iV_i^+ + r_{i+1}V_{i+1}^+}{r_i + r_{i+1}} + G_4 \frac{r_iV_i^- + r_{i+1}V_{i+1}^-}{r_i + r_{i+1}} \\ &= -\sigma[r_iV_i^- - a\sqrt{\omega} \otimes \sqrt{\omega}(r_{i+1}V_{i+1}^+ + r_iV_i^-)]. \end{aligned}$$

Avec cette discrétisation, les propriétés 2.17 et 2.22 sont préservées au niveau discret. Il reste à inverser le système pour trouver les approximations de \mathcal{T}_1 , \mathcal{T}_2 , \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 correspondantes. On remarque en outre que si $V_i^+ = V_{i+1}^- = 0$, on a bien $V_{i+1}^+ = V_i^- = 0$ grâce à l'égalité d'énergie. Les quantités V_{i+1}^+ et V_i^- sont solutions du système par bloc suivant :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} r_{i+1} \left(D + \frac{\Delta r_i}{r_i + r_{i+1}} G_1 + \sigma \Delta r_i (I - a\sqrt{\omega} \otimes \sqrt{\omega}) \right) & \Delta r_i r_i \left(\frac{G_2}{r_i + r_{i+1}} - \sigma a\sqrt{\omega} \otimes \sqrt{\omega} \right) \\ \Delta r_i r_{i+1} \left(\frac{G_3}{r_i + r_{i+1}} - \sigma a\sqrt{\omega} \otimes \sqrt{\omega} \right) & r_i \left(D + \frac{\Delta r_i}{r_i + r_{i+1}} G_4 + \sigma \Delta r_i (I - a\sqrt{\omega} \otimes \sqrt{\omega}) \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{i+1}^+ \\ V_i^- \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r_i \left(D - \frac{\Delta r_i}{r_i + r_{i+1}} G_1 \right) & -\frac{\Delta r_i r_{i+1}}{r_i + r_{i+1}} G_2 \\ -\frac{\Delta r_i r_i}{r_i + r_{i+1}} G_3 & r_{i+1} \left(D - \frac{\Delta r_i}{r_i + r_{i+1}} G_4 \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_i^+ \\ V_{i+1}^- \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice à inverser est bien inversible (preuve par l'inégalité d'énergie). Notons que $G_2 = -G_3$ et $G_1 = -G_4$ (de ce fait G_2 est symétrique). Cela est cependant anecdotique et ne joue aucun rôle dans les résultats ci-dessus. On obtient donc l'expression des matrices de transmission / réflexion dans le cas où σ et a sont constants. L'expression du schéma (2.49) fait intervenir les matrices de transmission / réflexion entre deux centres de mailles $[r_i, r_{i+1}]$. Si l'on suppose que σ et a sont constants par maille, alors il faut calculer les matrices transmission / réflexion dans le cas où σ et a sont constants par morceaux avec une discontinuité. On utilise alors la technique suivante. On construit les matrices de transmission / réflexion sur chacune des demi-mailles $[r_i, r_{i+1/2}]$ et $[r_{i+1/2}, r_{i+1}]$. On reconstruit alors les matrices sur l'intervalle entier $[r_i, r_{i+1}]$ en utilisant la propriété suivante.

Propriété 2.30. Soit $0 < r_1 < r_2 < r_3$. Soit $\mathcal{T}_1^1, \mathcal{T}_2^1, \mathcal{R}_1^1$ et \mathcal{R}_2^1 les matrices de transmission/réflexion pour l'intervalle $[r_1, r_2]$. Soit $\mathcal{T}_1^2, \mathcal{T}_2^2, \mathcal{R}_1^2$ et \mathcal{R}_2^2 les matrices de transmission/réflexion pour l'intervalle $[r_2, r_3]$. On définit alors $\mathcal{T}_1^3, \mathcal{T}_2^3, \mathcal{R}_1^3$ et \mathcal{R}_2^3 les matrices de transmission/réflexion pour l'intervalle $[r_1, r_3]$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1^3 &= \mathcal{T}_1^2 (I - \mathcal{R}_1^1 \mathcal{R}_2^2)^{-1} \mathcal{T}_1^1, \\ \mathcal{T}_2^3 &= \mathcal{T}_2^1 (I - \mathcal{R}_2^2 \mathcal{R}_1^1)^{-1} \mathcal{T}_2^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1^3 &= \mathcal{R}_1^2 + \mathcal{T}_1^2 \mathcal{R}_1^1 (I - \mathcal{R}_2^2 \mathcal{R}_1^1)^{-1} \mathcal{T}_2^2, \\ \mathcal{R}_2^3 &= \mathcal{R}_2^1 + \mathcal{T}_2^1 \mathcal{R}_2^2 (I - \mathcal{R}_1^1 \mathcal{R}_2^2)^{-1} \mathcal{T}_1^1.\end{aligned}$$

Dans ces dernières expressions, les matrices qu'il faut inverser sont bien inversibles grâce à (2.37).

Il s'agit alors de vérifier que les matrices de transmission / réflexion reconstruites vérifient bien les propriétés 2.17 et 2.22. C'est bien le cas comme le montre les deux propriétés suivantes.

Propriété 2.31. Si les matrices de transmission/réflexion pour les intervalles $[r_1, r_2]$ et $[r_2, r_3]$ vérifient la propriété 2.17, alors il en est de même pour les matrices de transmission/réflexion pour l'intervalle $[r_1, r_3]$ données dans la propriété 2.30.

Démonstration. Soit $X, Y \in \mathbb{R}^q$. On veut montrer que :

$$\begin{aligned}& r_3^2 \langle \mathcal{T}_1^3 X + \mathcal{R}_1^3 Y, D(\mathcal{T}_1^3 X + \mathcal{R}_1^3 Y) \rangle + r_1^2 \langle \mathcal{R}_2^3 X + \mathcal{T}_2^3 Y, D(\mathcal{R}_2^3 X + \mathcal{T}_2^3 Y) \rangle \\ & \leq r_1^2 \langle X, DX \rangle + r_3^2 \langle Y, DY \rangle.\end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned}X^* &= (I - \mathcal{R}_1^1 \mathcal{R}_2^2)^{-1} \mathcal{T}_1^1 X, \quad Y^* = (I - \mathcal{R}_2^2 \mathcal{R}_1^1)^{-1} \mathcal{T}_2^2 Y. \\ X^{**} &= X^* + \mathcal{R}_1^1 Y^*, \quad Y^{**} = Y^* + \mathcal{R}_2^2 X^*.\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}& r_3^2 \langle \mathcal{T}_1^3 X + \mathcal{R}_1^3 Y, D(\mathcal{T}_1^3 X + \mathcal{R}_1^3 Y) \rangle \\ & + r_1^2 \langle \mathcal{R}_2^3 X + \mathcal{T}_2^3 Y, D(\mathcal{R}_2^3 X + \mathcal{T}_2^3 Y) \rangle \\ & = r_3^2 \langle \mathcal{T}_1^2 X^{**} + \mathcal{R}_1^2 Y, D(\mathcal{T}_1^2 X^{**} + \mathcal{R}_1^2 Y) \rangle \\ & + r_1^2 \langle \mathcal{R}_2^1 X + \mathcal{T}_2^1 Y^{**}, D(\mathcal{R}_2^1 X + \mathcal{T}_2^1 Y^{**}) \rangle \\ & = r_3^2 \langle \mathcal{T}_1^2 X^{**} + \mathcal{R}_1^2 Y, D(\mathcal{T}_1^2 X^{**} + \mathcal{R}_1^2 Y) \rangle \\ & + r_2^2 \langle \mathcal{T}_2^2 Y + \mathcal{R}_2^2 X^{**}, D(\mathcal{T}_2^2 Y + \mathcal{R}_2^2 X^{**}) \rangle \\ & - r_2^2 \langle \mathcal{T}_2^2 Y + \mathcal{R}_2^2 X^{**}, D(\mathcal{T}_2^2 Y + \mathcal{R}_2^2 X^{**}) \rangle \\ & + r_1^2 \langle \mathcal{R}_2^1 X + \mathcal{T}_2^1 Y^{**}, D(\mathcal{R}_2^1 X + \mathcal{T}_2^1 Y^{**}) \rangle \\ & + r_2^2 \langle \mathcal{R}_1^1 Y^{**} + \mathcal{T}_1^1 X, D(\mathcal{R}_1^1 Y^{**} + \mathcal{T}_1^1 X) \rangle \\ & - r_2^2 \langle \mathcal{R}_1^1 Y^{**} + \mathcal{T}_1^1 X, D(\mathcal{R}_1^1 Y^{**} + \mathcal{T}_1^1 X) \rangle.\end{aligned}$$

En utilisant la propriété 2.17 pour l'intervalle $[r_1, r_2]$, on a :

$$\begin{aligned}& r_1^2 \langle \mathcal{R}_2^1 X + \mathcal{T}_2^1 Y^{**}, D(\mathcal{R}_2^1 X + \mathcal{T}_2^1 Y^{**}) \rangle \\ & + r_2^2 \langle \mathcal{R}_1^1 Y^{**} + \mathcal{T}_1^1 X, D(\mathcal{R}_1^1 Y^{**} + \mathcal{T}_1^1 X) \rangle \\ & \leq r_1^2 \langle X, DX \rangle + r_2^2 \langle Y^{**}, DY^{**} \rangle.\end{aligned}$$

En utilisant la propriété 2.17 pour l'intervalle $[r_2, r_3]$, on a :

$$\begin{aligned} & r_3^2 \langle \mathcal{R}_1^2 Y + \mathcal{T}_1^2 X^{**}, D(\mathcal{R}_1^2 Y + \mathcal{T}_1^2 X^{**}) \rangle \\ & + r_2^2 \langle \mathcal{R}_2^2 X^{**} + \mathcal{T}_2^2 Y, D(\mathcal{R}_2^2 X^{**} + \mathcal{T}_2^2 Y) \rangle \\ & \leq r_2^2 \langle X^{**}, DX^{**} \rangle + r_3^2 \langle Y, DY \rangle. \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} & r_3^2 \langle \mathcal{T}_1^3 X + \mathcal{R}_1^3 Y, D(\mathcal{T}_1^3 X + \mathcal{R}_1^3 Y) \rangle \\ & + r_1^2 \langle \mathcal{R}_2^3 X + \mathcal{T}_2^3 Y, D(\mathcal{R}_2^3 X + \mathcal{T}_2^3 Y) \rangle \\ & \leq r_1^2 \langle X, DX \rangle + r_3^2 \langle Y, DY \rangle \\ & + r_2^2 \langle X^{**}, DX^{**} \rangle + r_2^2 \langle Y^{**}, DY^{**} \rangle \\ & - r_2^2 \langle \mathcal{T}_2^2 Y + \mathcal{R}_2^2 X^{**}, D(\mathcal{T}_2^2 Y + \mathcal{R}_2^2 X^{**}) \rangle \\ & - r_2^2 \langle \mathcal{R}_1^1 Y^{**} + \mathcal{T}_1^1 X, D(\mathcal{R}_1^1 Y^{**} + \mathcal{T}_1^1 X) \rangle. \end{aligned}$$

On finit la démonstration en remarquant que :

$$\mathcal{T}_2^2 Y + \mathcal{R}_2^2 X^{**} = Y^{**}, \quad \mathcal{T}_1^1 X + \mathcal{R}_1^1 Y^{**} = X^{**}.$$

□

Propriété 2.32. Si les matrices de transmission/réflexion pour les intervalles $[r_1, r_2]$ et $[r_2, r_3]$ vérifient la propriété 2.22, alors il en est de même pour les matrices de transmission/réflexion pour l'intervalle $[r_1, r_3]$ données par dans la propriété 2.30.

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} (r_3^2 \mathcal{T}_1^3 + r_1^2 \mathcal{R}_2^3)^t z &= (r_3^2 \mathcal{T}_1^2 (I - \mathcal{R}_1^1 \mathcal{R}_2^2)^{-1} \mathcal{T}_1^1 + r_1^2 \mathcal{R}_2^1 \\ & + r_1^2 \mathcal{T}_2^1 \mathcal{R}_2^2 (I - \mathcal{R}_1^1 \mathcal{R}_2^2)^{-1} \mathcal{T}_1^1)^t z \\ &= [(I - \mathcal{R}_1^1 \mathcal{R}_2^2)^{-1} \mathcal{T}_1^1]^t (r_3^2 \mathcal{T}_1^2 + r_2^2 \mathcal{R}_2^2 - r_2^2 \mathcal{R}_2^2 + r_1^2 \mathcal{T}_2^1 \mathcal{R}_2^2)^t z \\ & + r_1^2 (\mathcal{R}_2^1)^t z \\ &= [(I - \mathcal{R}_1^1 \mathcal{R}_2^2)^{-1} \mathcal{T}_1^1]^t (r_2^2 I - (r_2^2 I - r_1^2 \mathcal{T}_2^1) \mathcal{R}_2^2)^t z \\ & + r_1^2 (\mathcal{R}_2^1)^t z \\ &= r_2^2 [(I - \mathcal{R}_1^1 \mathcal{R}_2^2)^{-1} \mathcal{T}_1^1]^t (I - \mathcal{R}_1^1 \mathcal{R}_2^2)^t z + r_1^2 (\mathcal{R}_2^1)^t z \\ &= (r_2^2 \mathcal{T}_1^1 + r_1^2 \mathcal{R}_2^1)^t z = r_1^2 z. \end{aligned}$$

On fait de même pour l'autre. □

2.7 Résultats numériques

Dans cette section, on teste le schéma décrit précédemment dans plusieurs configurations. Dans un premier temps, on étudie le cas du transport dans le vide, *i.e* dans le cas où σ et q sont nuls. Dans ce cas, on dispose d'une formule analytique des états

stationnaires du modèle P_N associé, si bien que le schéma étudié capture exactement les états stationnaires. Dans le cas $N = 1$, on a l'expression analytique de la solution du modèle P_N . On compare alors trois solutions : la solution numérique, la solution exacte du modèle P_1 et la solution du modèle de transport. On se place sur un domaine $r \in [0, 2]$ que l'on maille avec une grille uniforme $r_{i+1/2} = 2i/N_c$ pour $0 \leq i \leq N_c$, où N_c désigne le nombre de cellules et les centres de mailles r_i sont choisis au milieu des cellules. La condition initiale du problème est donnée par une fonction constante par morceaux avec une seule discontinuité située en $r_d = 0.5$:

$$u(t, 0, \mu) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq r \leq r_d, \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La condition initiale du modèle P_N est donc donnée par :

$$\langle U(t, 0), e_0 \rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq r \leq r_d, \\ 1, & \text{sinon,} \end{cases}$$

et $\langle U(t, 0), e_k \rangle = 0$ pour tout $k > 0$. Avec cette condition, initiale, la solution analytique du modèle P_1 est donnée par :

$$\rho(t, r) = \frac{1}{2r} \left[\left(r + \frac{ct}{\sqrt{3}} \right) \rho^0 \left(r + \frac{ct}{\sqrt{3}} \right) + \left(r - \frac{ct}{\sqrt{3}} \right) \rho^0 \left(\left| r - \frac{ct}{\sqrt{3}} \right| \right) \right],$$

et la solution du problème de transport s'écrit :

$$\rho(t, r) = \begin{cases} 1., & \text{si } r^2 - r_d^2 + c^2 t^2 > 2crt, \\ 0., & \text{si } r^2 - r_d^2 + c^2 t^2 < -2crt, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{r^2 - r_d^2 + c^2 t^2}{2crt} + 1 \right), & \text{sinon.} \end{cases}$$

On compare alors la solution numérique, pour différents nombres de mailles, avec ces deux solutions analytiques ; voir figures (2.3), (2.4), (2.5). Grâce à la formule analytique du modèle de transport, on sait qu'en $t = r_d/c$, l'onde radiative redondit sur le bord $r = 0$. On a alors tracé les solutions en 3 instants différents situés avant ce rebond, au moment du rebond et après le rebond. Les résultats montrent la convergence de la méthode numérique vers la solution du modèle P_1 lorsque le nombre de maille augmente, et ce pour les 3 instants considérés. En revanche, la solution P_1 reste peu précise par rapport à la solution du modèle de transport. Sur les figures (2.3), (2.4), (2.5), on montre la convergence de la solution numérique P_1 vers la solution analytique du modèle P_1 lorsque le nombre de mailles augmente. La convergence est illustrée aux 3 instants caractéristiques : avant le rebond, au moment du rebond et après le rebond. Sur les figures (2.6), (2.7), (2.8), on illustre la convergence des solutions numériques du modèle P_N vers la solution analytique du problème de transport lorsque le nombre d'harmoniques N et le nombre de mailles augmentent. On observe la convergence aux 3 instants caractéristiques : avant le rebond, au moment du rebond et après le rebond.

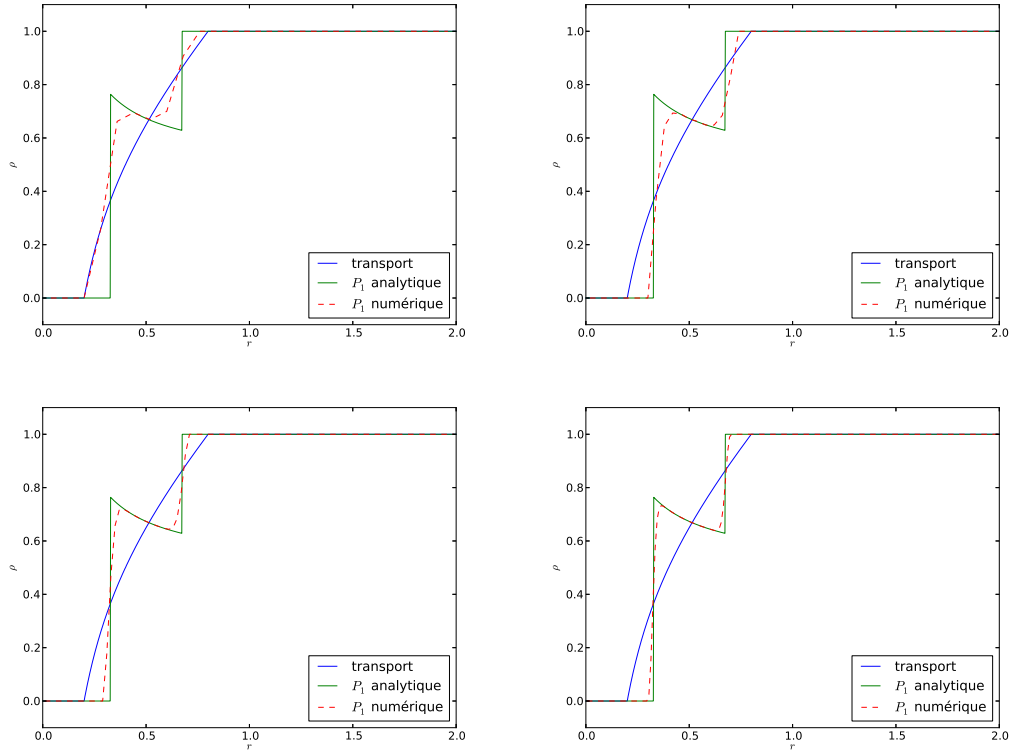


FIGURE 2.3 – Comparaison entre la solution numérique et les solutions analytiques du modèle P_1 et du modèle de transport à $t = 0.3$. Le nombre de maille vaut 25, 50, 100 et 200 (de haut en bas et de gauche à droite).

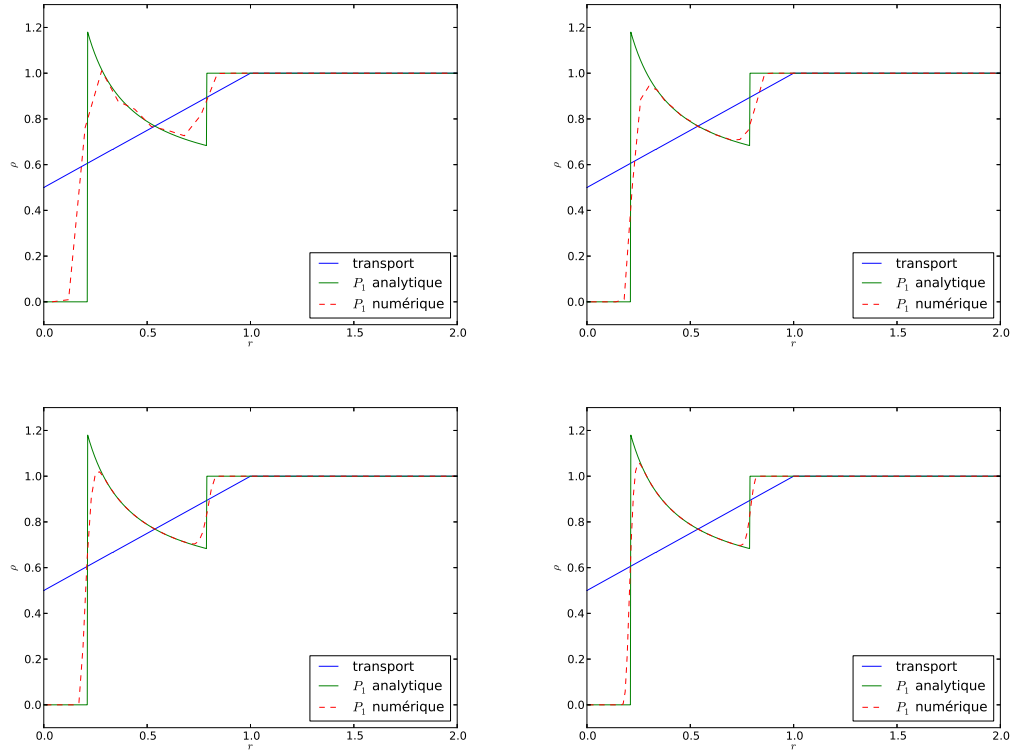


FIGURE 2.4 – Comparaison entre la solution numérique et les solutions analytiques du modèle P_1 et du modèle de transport à $t = 0.5$. Le nombre de maille vaut 25, 50, 100 et 200 (de haut en bas et de gauche à droite).

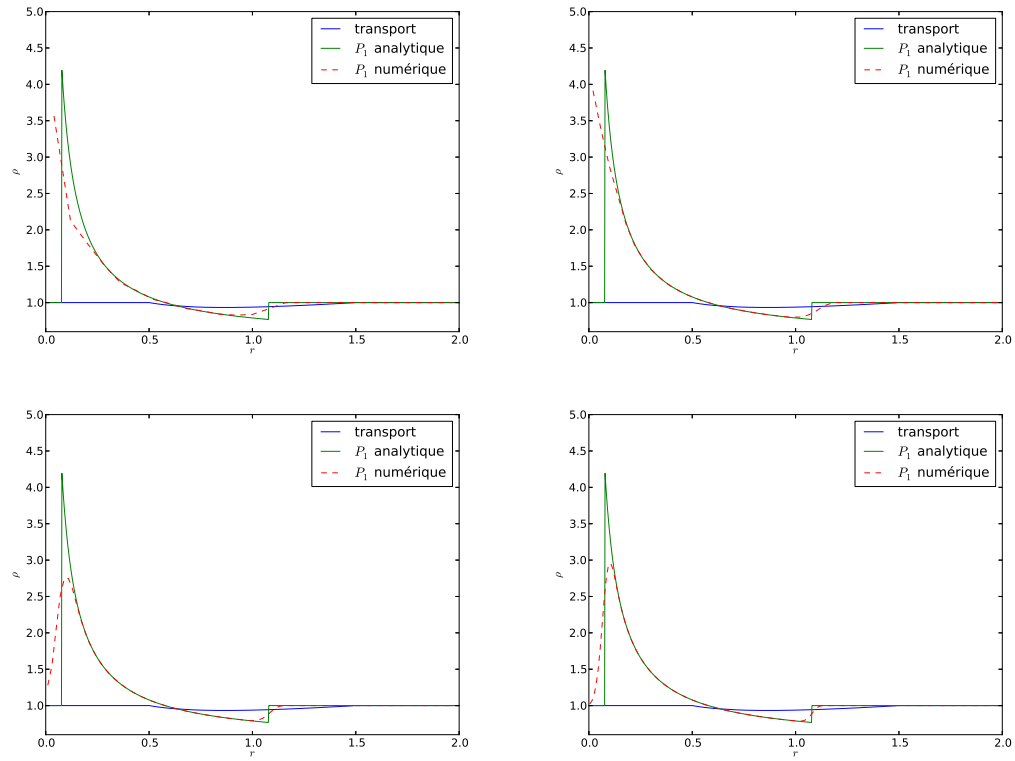


FIGURE 2.5 – Comparaison entre la solution numérique et les solutions analytiques du modèle P_1 et du modèle de transport à $t = 1$. Le nombre de maille vaut 25, 50, 100 et 200 (de haut en bas et de gauche à droite).

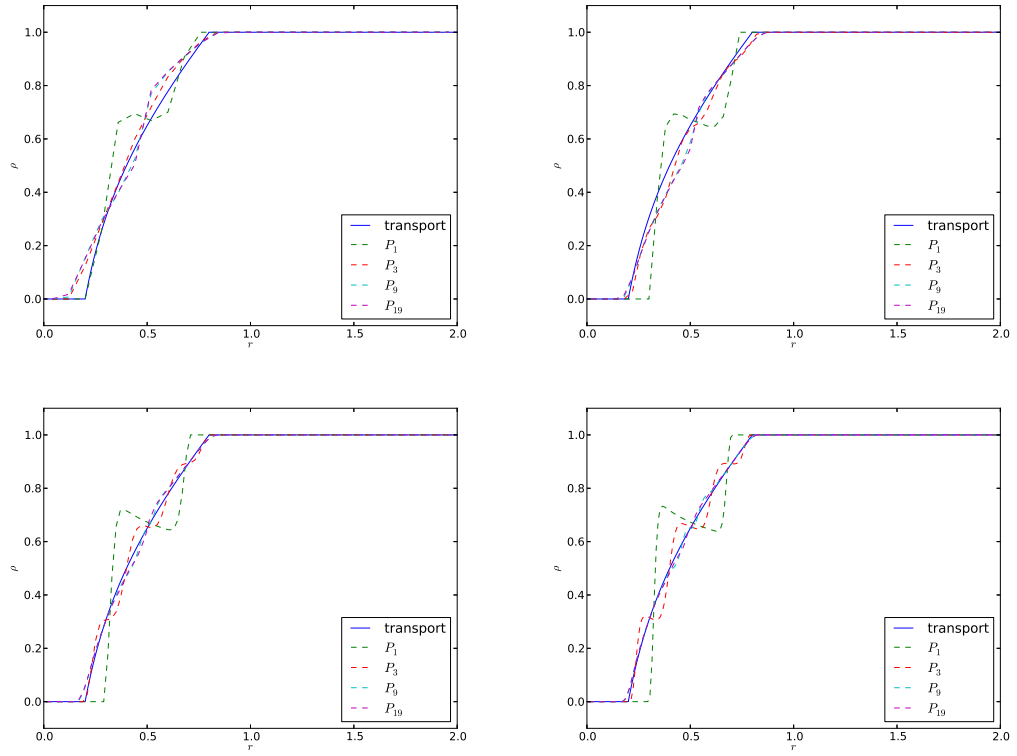


FIGURE 2.6 – Convergence en harmoniques à nombre de mailles fixé de la solution numérique vers la solution analytique du modèle de transport pour $t = 0.3$. De haut en bas et de gauche à droite, le nombre de mailles vaut 25, 50, 100 et 200.

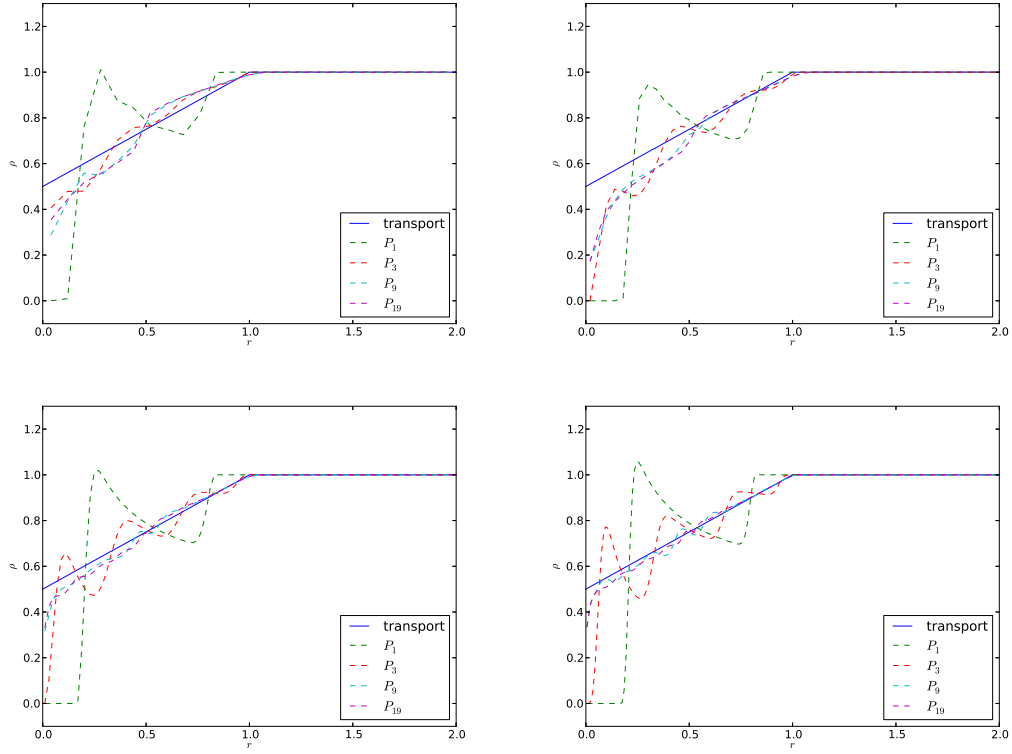


FIGURE 2.7 – Convergence en harmoniques à nombre de mailles fixé de la solution numérique vers la solution analytique du modèle de transport pour $t = 0.5$. De haut en bas et de gauche à droite, le nombre de mailles vaut 25, 50, 100 et 200.

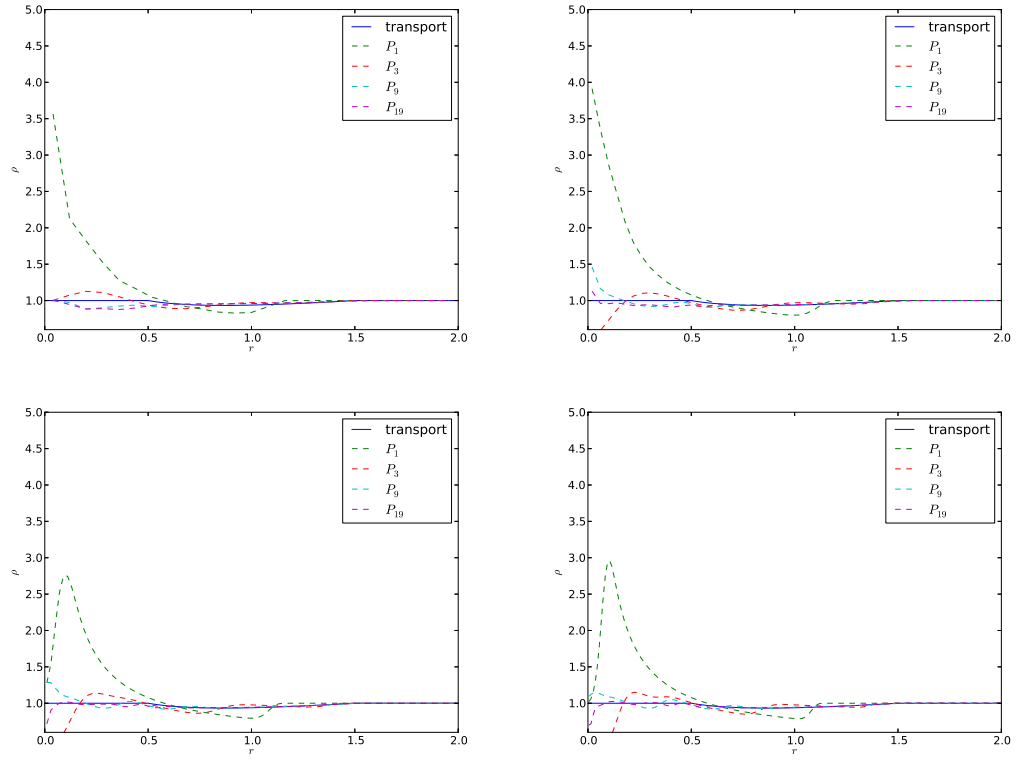


FIGURE 2.8 – Convergence en harmoniques à nombre de mailles fixé de la solution numérique vers la solution analytique du modèle de transport pour $t = 1$. De haut en bas et de gauche à droite, le nombre de mailles vaut 25, 50, 100 et 200.

On considère à présent un second cas-test : le cas-test appelé Star-in-Space. C'est un cas-test stationnaire où l'on considère la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \mu \partial_r I + \frac{1 - \mu^2}{r} \partial_\mu I = 0, & r_1 < r < r_2, \quad -1 \leq \mu \leq 1, \\ u(r_1, \mu > 0) = 1, \\ u(r_2, \mu < 0) = 0. \end{cases}$$

La méthode des caractéristiques nous donne l'expression analytique de la solution :

$$\rho(r) = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{r_1^2}{r^2}} \right), \quad r_1 \leq r \leq r_2.$$

On teste le schéma développé précédemment sur ce cas-test en observant son comportement en temps long. Tout comme dans le cas précédent, on considère que le rayonnement se propage dans le vide si bien que l'on peut appliquer le schéma sans aucune approximation sur les états stationnaires. Comme le schéma est bien équilibré, il doit capturer exactement les états stationnaires du modèle P_N en temps long quel que soit le maillage spatial considéré. On compare alors les solutions numériques obtenues pour différents nombres d'harmoniques en temps long avec la solution du problème de transport. On vérifie aussi que le nombre de mailles ne joue aucun rôle pour la solution numérique. La figure (2.9) montre les résultats obtenus pour les paramètres suivants : $r_1 = 1$ et $r_2 = 10$. On voit en particulier que le nombre de mailles a peu d'influence sur les résultats obtenus en temps long. Les résultats montrent en particulier la convergence en nombre d'harmoniques. Cette dernière est cependant lente sur ce cas-test.

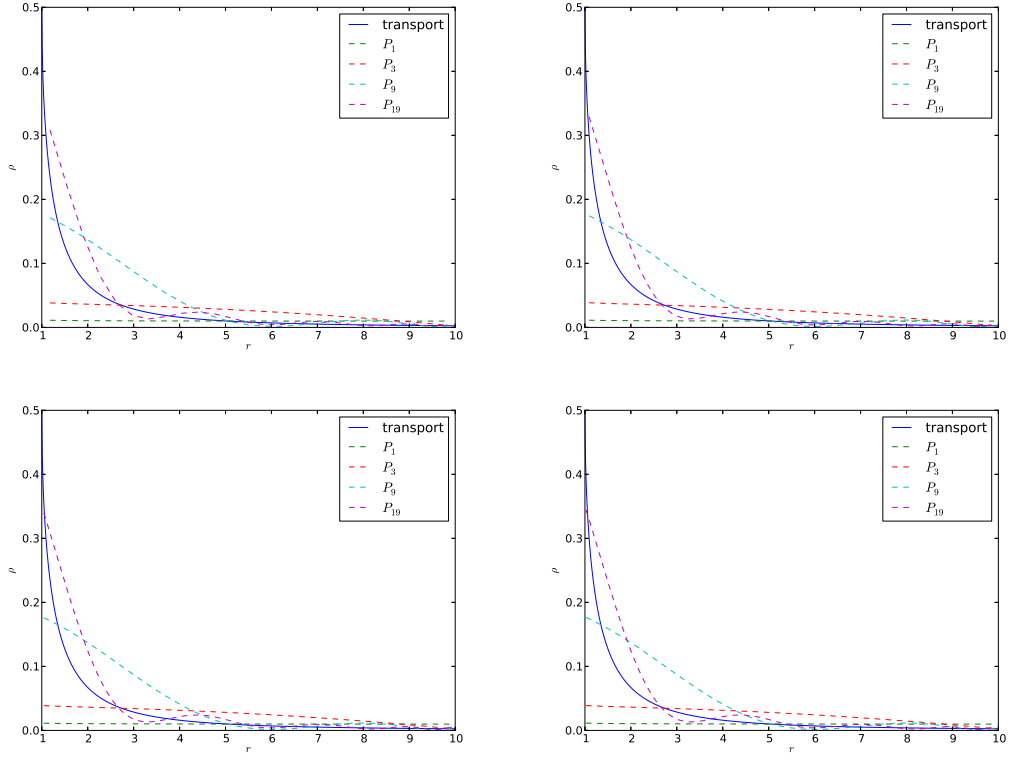


FIGURE 2.9 – Comparaisons entre la solution numérique et la solution transport sur le cas Star-in-Space. Sur chacune des figures, on a tracé la solution transport et plusieurs solutions numériques à nombre d'harmoniques différents. Les figures diffèrent uniquement par le nombre de mailles : de haut en bas et de gauche à droite, $N_c = 25, 50, 100, 200$.

Le troisième cas-test étudié est un cas en géométrie $1D$ plane. Le schéma développé se transpose aisément dans cette géométrie. On étudie la propagation d'un rayonnement à travers un matériau diffusif possédant une discontinuité forte d'opacité. Le problème de transport associé s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \partial_t I + \mu \partial_x I = -\sigma I + \sigma \int_{-1}^1 I \frac{d\mu}{2}, & x_1 < x < x_2, \quad t > 0, \quad -1 \leq \mu \leq 1, \\ I(0, x, \mu) = 0, & x_1 < x < x_2, \quad -1 \leq \mu \leq 1, \\ I(t, x_1, \mu > 0) = 0, & t > 0, \\ I(t, x_2, \mu < 0) = 1, & t > 0. \end{cases}$$

où σ dépend de l'espace de la manière suivante :

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_1, & x < x_m, \\ \sigma_2, & x \geq x_m. \end{cases}$$

On choisit $\sigma_1 = 100$ et $\sigma_2 = 10^{-8}$ de sorte que le matériau soit transparent pour $x > x_m$ et opaque pour $x < x_m$. Dans ce cas, il n'y a pas de terme source géométrique qui apparaît dans le modèle P_N associé, si bien qu'il est possible d'exprimer analytiquement les états stationnaires. Le schéma étudié capture donc exactement les états stationnaires du modèle P_N . Dans un premier temps, on étudie le schéma pour des temps courts de sorte que l'état stationnaire ne soit pas encore atteint. Dans ce cas, on ne dispose d'aucune solution analytique, que ce soit du problème du transport ou du modèle P_N . On constate uniquement la convergence en nombre de mailles et en nombre d'harmoniques du schéma. On a choisi ici $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ et $x_m = 0.5$. De la sorte, pour $t < 0.5$, le rayonnement n'a pas encore atteint la zone opaque. Pour $t > 0.5$, on commence à voir les effets de la diffusion du rayonnement par la matière. On regarde alors les résultats aux deux instants $t = 0.5$ et $t = 1$. Les résultats sont montrés sur les figures (2.10) et (2.11). Dans un second temps, on étudie le comportement en temps long des solutions numériques. Comme le schéma est bien équilibré, les états stationnaires du modèle P_N doivent être capturés exactement. On observe donc les solutions numériques au temps $t = 1000$. Pour cela, on utilise la version implicite du schéma et on effectue un seul pas de temps. Les résultats pour des nombres d'harmoniques et de mailles différents sont tracés sur la figure (2.12). On remarque la convergence en temps long de la solution numérique vers l'état stationnaire du modèle P_N . De plus, l'état stationnaire du problème de transport est capturé dès $N = 1$.

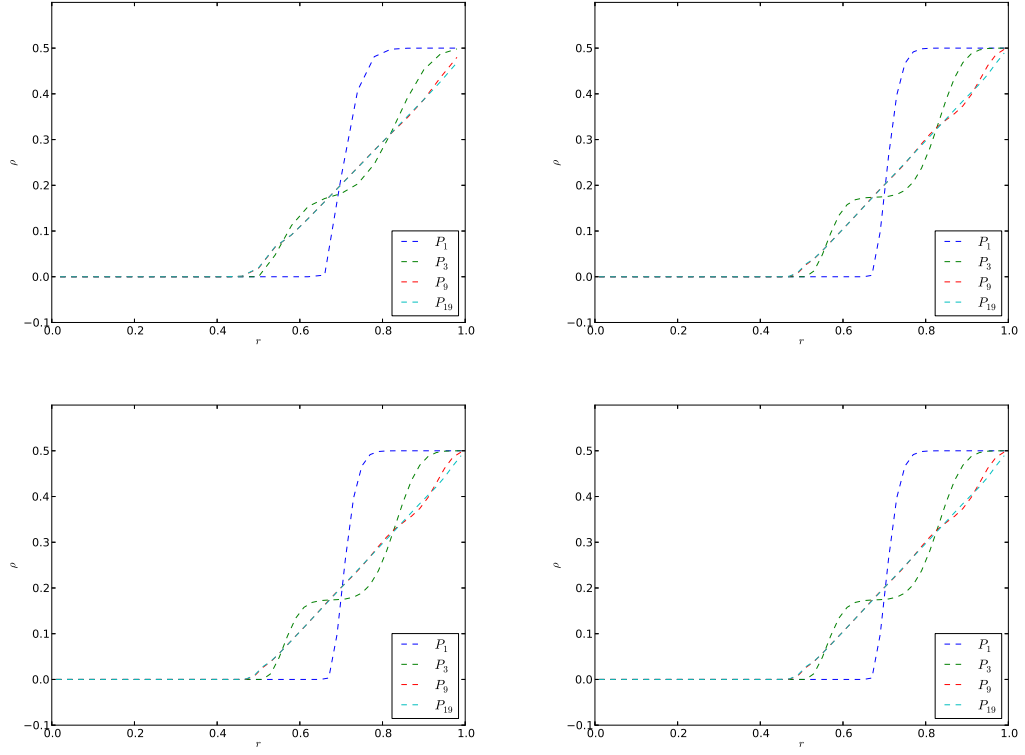


FIGURE 2.10 – Résultats numériques pour le cas-test 1D plan avec σ discontinu. Sur chacune des figures, on a tracé plusieurs solutions à nombre d'harmoniques différents à $t = 0.5$. À cet instant, l'onde radiative n'a pas encore atteint la zone opaque. Les figures diffèrent uniquement par le nombre de mailles : de haut en bas et de gauche à droite, $N_c = 25, 50, 100, 200$.

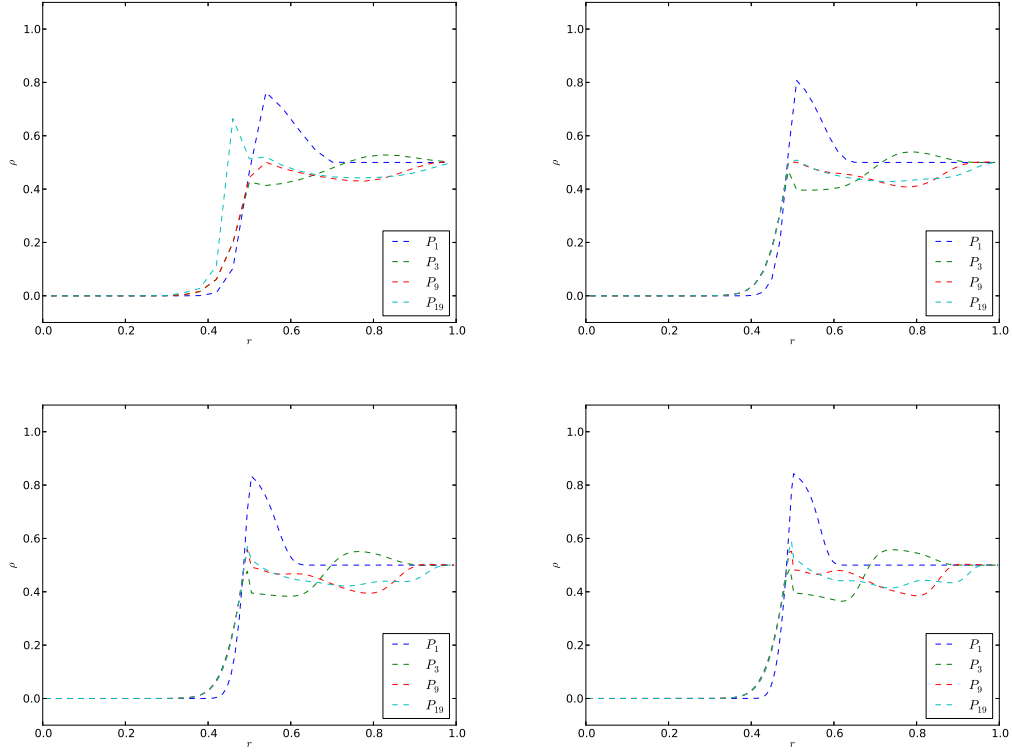


FIGURE 2.11 – Résultats numériques pour le cas-test $1D$ plan avec σ discontinu. Sur chacune des figures, on a tracé plusieurs solutions à nombre d'harmoniques différents à $t = 1$. À cet instant, l'onde radiative est entrée dans la zone opaque et est alors diffusée. Les figures diffèrent uniquement par le nombre de mailles : de haut en bas et de gauche à droite, $N_c = 25, 50, 100, 200$.

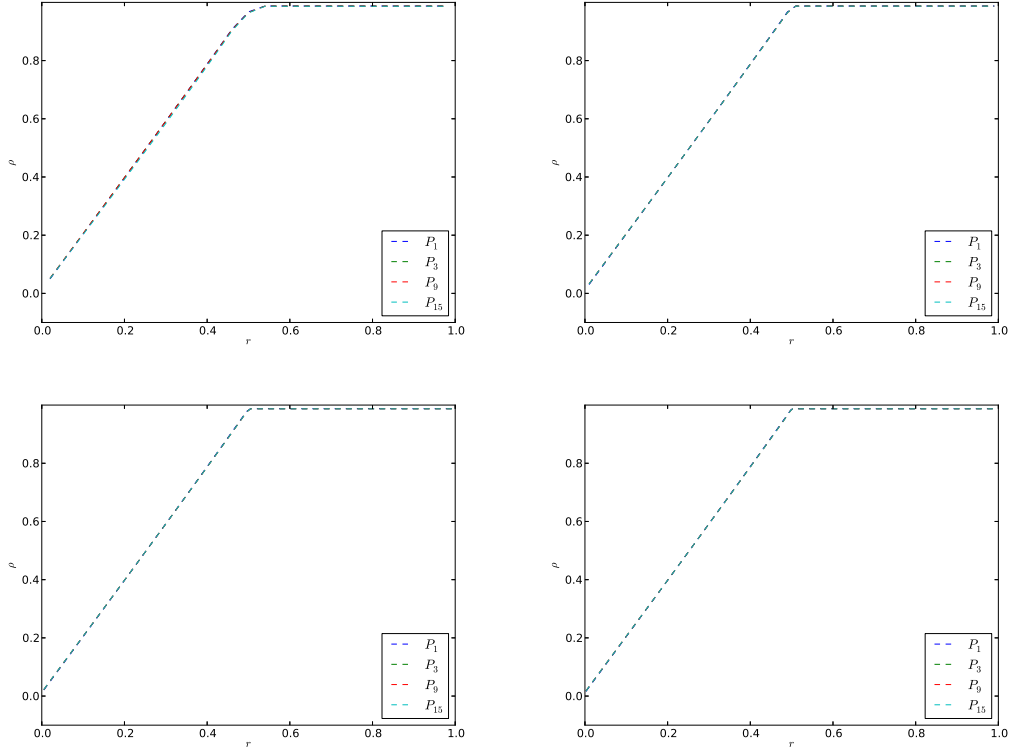


FIGURE 2.12 – Résultats numériques en temps long pour le cas-test 1D plan avec σ discontinu. Sur chacune des figures, on a tracé plusieurs solutions à nombre d'harmoniques différents à $t = 1000$. Les figures diffèrent uniquement par le nombre de mailles : de haut en bas et de gauche à droite, $N_c = 25, 50, 100, 200$. Les courbes sont superposées, ce qui montre la convergence vers l'état stationnaire du problème de transport dès que $N = 1$.

Le dernier cas-test étudié est celui apparaissant dans [Mac07]. C'est un cas-test stationnaire en géométrie 1D sphérique avec σ non nul et discontinu. Le problème résolu est le suivant :

$$\begin{cases} \mu \partial_r I + \frac{1 - \mu^2}{r} \partial_\mu I = -\sigma I + q, & 0 < r < r_2, \quad -1 \leq \mu \leq 1, \\ I(r_2, \mu < 0) = 0. \end{cases}$$

où σ et q dépendent de l'espace et sont des fonctions constantes par morceaux définies par :

$$\sigma(r) = \begin{cases} \sigma_1, & r < r_m, \\ \sigma_2, & r \geq r_m, \end{cases} \quad q(r) = \begin{cases} q_1, & r < r_m, \\ q_2, & r \geq r_m. \end{cases}$$

Dans le cas présent, on choisit $\sigma_1 = 10^{-8}$, $\sigma_2 = 100$, $q_1 = 1$ et $q_2 = 0$. Dans ce problème, la matière absorbe des photons mais il n'y a pas d'émission. La solution analytique à ce problème s'obtient par la méthode des caractéristiques et est donnée dans [Mac07]. La combinaison des effets sphériques et des interactions rayonnement / matière fait que l'on ne peut pas explicitement exprimer les états stationnaires du modèle P_N . On utilise alors dans ce cas l'un des schémas approchés présentés dans la section précédente. Pour la prise en compte du terme source q , on effectue une séparation d'opérateur d'ordre 1 en temps. On compare alors les solutions numériques obtenues en temps long avec la solution analytique du problème pour des nombres d'harmoniques et des nombres de mailles différents. On s'attend à ce que les solutions numériques approchent l'état stationnaire du problème de transport lorsque le nombre de mailles et le nombre d'harmoniques augmentent. On voit sur les résultats que l'approximation faite sur les états stationnaires du modèle P_N impacte directement la précision des résultats sur des maillages grossiers. L'approximation par séparation d'opérateur pour prendre en compte le terme source q est aussi un facteur de cette perte de précision. En revanche, lorsqu'on raffine le maillage, l'approximation des états stationnaires devient de plus en plus précise et le schéma converge bien, lorsque le nombre d'harmonique augmente, vers l'état stationnaire du problème de transport.

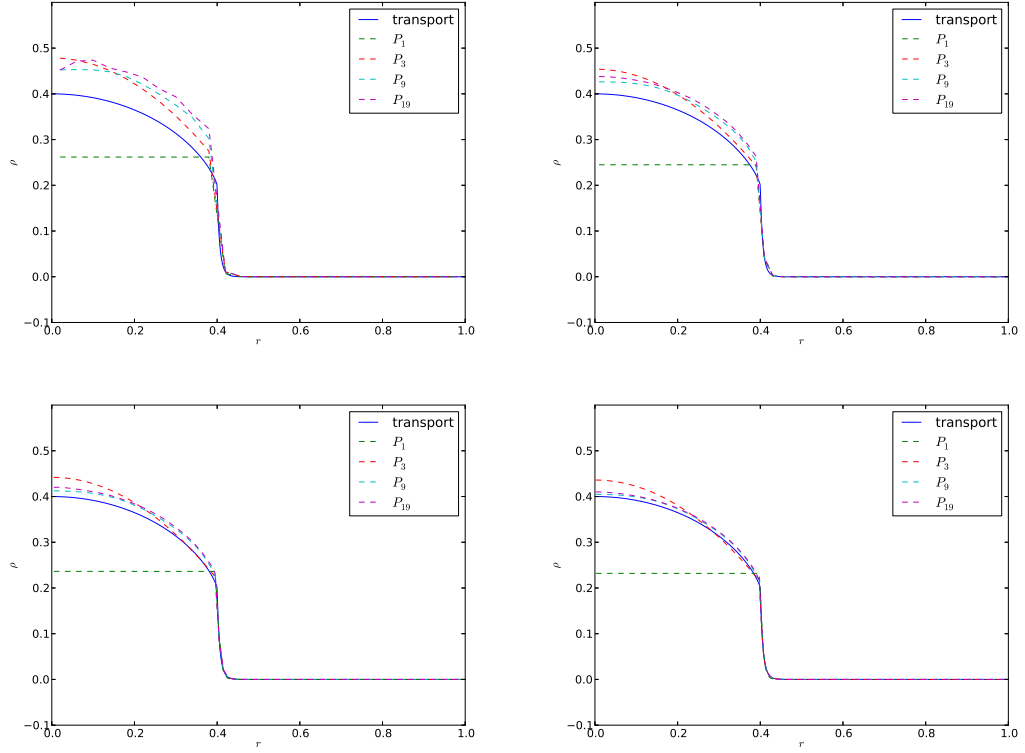


FIGURE 2.13 – Résultats numériques en temps long pour le cas-test ([Mac07]). Sur chacune des figures, on a tracé plusieurs solutions à nombre d'harmoniques différents à $t = 1000$. Les figures diffèrent uniquement par le nombre de mailles : de haut en bas et de gauche à droite, $N_c = 25, 50, 100, 200$. Les courbes sont superposées, ce qui montre la convergence vers l'état stationnaire du problème de transport dès que $N = 1$.

En résumé, les résultats numériques illustrent l'efficacité du schéma dans tous les cas où l'on est capable d'exprimer les états stationnaires par une formule analytique, c'est-à-dire le cas du transport 1D sphérique dans le vide et le cas du transport 1D plan avec couplage à la matière de type scattering. Dans ces deux cas, le schéma présenté converge en nombre de maille et en nombre d'harmonique vers la solution du problème de transport. De plus, on a montré que le schéma converge bien en temps long vers la solution stationnaire du modèle P_N . Dans le dernier cas ([Mac07]), la combinaison des effets géométriques et des effets de scattering implique qu'on n'est pas en mesure d'exprimer les états stationnaires du modèle P_N sous une forme analytique simple. Dans ce cas, on est contraint d'approcher ces états d'équilibres par différentes méthodes (séparation d'opérateurs, série de Magnus). Ceci implique que le schéma ne converge pas en temps long vers la solution stationnaire du modèle P_N . Cependant, en raffinant le maillage spatial, les approximations sur les états d'équilibres deviennent de plus en plus précises. En conséquence, on obtient bien la convergence du schéma en temps long vers l'état d'équilibre du modèle P_N lorsque le maillage spatial est suffisamment fin.

2.8 Modèle de transfert radiatif spectral

On s'intéresse ici à la discrétisation d'un problème de transfert radiatif. Par rapport aux sections précédentes, on ajoute dans les équations un couplage à la matière non linéaire, une relaxation entre ions et électrons et la dimension fréquentielle. On se place toujours en géométrie 1D sphérique, de sorte que les équations s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \partial_t I_\nu + \mu \partial_r I_\nu + \frac{1 - \mu^2}{r} \partial_\mu I_\nu = \sigma(B(\nu, T_e) - I_\nu), \\ \partial_t E_e = 4\pi \int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 \sigma(I_\nu - B(\nu, T_e)) \frac{d\mu}{2} d\nu + c\kappa(T_i - T_e), \\ \partial_t E_i = c\kappa(T_e - T_i), \end{cases} \quad (2.55)$$

avec I_ν l'intensité radiative, E_e et E_i les énergies internes associées aux ions et aux électrons, T_i et T_e les températures associées à ces énergies définies par $E_e = C_{v,e} T_e$ et $E_i = C_{v,i} T_i$ où $C_{v,e}$ et $C_{v,i}$ sont des coefficients constants représentant les capacités thermiques volumique pour les électrons et les ions (respectivement). La fonction B représente la fonction de Planck. La quantité σ représente l'opacité d'absorption de la matière et est une fonction qui dépend de la fréquence ν et de la température T_e . La quantité κ représente le coefficient de relaxation entre les ions et les électrons et est une fonction de T_i et T_e . Enfin, on note c la vitesse de la lumière considérée comme constante.

2.9 Modèle multigroupe

À la différence des chapitres précédents, on a pris en compte la dimension fréquentielle dans les équations (2.55). Cette nouvelle dimension ajoute de nouveau une difficulté en vue de la discrétisation du système. La première étape vers la discrétisation consiste alors

à construire un modèle approché selon le principe de la mise en groupe de fréquences. L'idée est de partitionner la plage de fréquence $[0, +\infty[$ en un nombre fini G de groupes, c'est-à-dire de se donner $G + 1$ fréquences discrètes $(\nu_g)_{0 \leq g \leq G}$ telles que :

$$0 = \nu_0 < \nu_1 < \dots < \nu_g < \dots < \nu_G = +\infty.$$

En intégrant l'équation du transfert sur chacun des groupes de fréquences $[\nu_{g-1}, \nu_g]$, on obtient :

$$\frac{1}{c} \partial_t I_g + \mu \partial_r I_g + \frac{1 - \mu^2}{r} \partial_\mu I_g = \sigma_g^P B_g - \sigma_g^E I_g, \quad 1 \leq g \leq G,$$

où I_g et B_g représentent les quantités I_ν et B_ν intégrées sur le groupe de fréquence. Les quantités σ_g^P et σ_g^E sont les moyennes d'opacité sur le groupe respectivement pondérées par les fonctions B_ν et I_ν . La deuxième équation de (2.55) devient alors :

$$\partial_t E_e = 4\pi \sum_1^G \int_{-1}^1 [\sigma_g^E I_g - \sigma_g^P B_g] \frac{d\mu}{2} + c\kappa(T_i - T_e).$$

Ici, nous n'avons effectué aucune approximation pour le moment. Le système (2.55), après mise en groupe, est alors constitué de $G + 2$ équations. Les inconnues du système sont les intensités sommées sur chacun des groupes $(I_g)_{1 \leq g \leq G}$ et les énergies internes des ions et des électrons respectivement E_i et E_e . Les quantités σ_g^P et B_g sont données par la température T_e des électrons. En revanche, les quantités σ_g^E dépendent de l'inconnue I_ν donc ne sont pas des données du problème. Pour pallier ce problème, plusieurs approximations sont possibles. Ici, nous adoptons l'approximation suivante : $\sigma_g^E \simeq \sigma_g^P = \sigma_g$. Le système s'écrit alors :

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \partial_t I_g + \mu \partial_r I_g + \frac{1 - \mu^2}{r} \partial_\mu I_g = \sigma_g (B_g - I_g), & 1 \leq g \leq G, \\ \partial_t E_e = 4\pi \sum_{g=1}^G \int_{-1}^1 \sigma_g (I_g - B_g) \frac{d\mu}{2} + c\kappa(T_i - T_e), \\ \partial_t E_i = c\kappa(T_e - T_i), \end{cases} \quad (2.56)$$

Ce dernier système contient bien autant d'inconnues que d'équations. Il est constitué de G équations du transfert, une pour chaque groupe de fréquence, couplées aux deux équations modélisant l'évolution de la matière. On peut à présent appliquer la méthode P_N sur chacune des équations du transfert.

2.10 Modèle P_N multigroupe

Dans cette section, on construit le modèle P_N multigroupe en appliquant la méthode P_N sur chacune des équations de transfert dans le système (2.56). On développe chaque fonction I_g sur une base tronquée d'harmoniques sphériques (polynôme de Legendre en

1D). On obtient alors, pour chaque groupe de fréquence, un modèle P_N de la forme suivante :

$$\frac{1}{c}\partial_t U_g + A\partial_r U_g + \frac{1}{r}GU_g = \sigma_g(B_g e_0 - U_g), \quad 1 \leq g \leq G, \quad (2.57)$$

où $e_0 = (1, 0, \dots, 0)^t$ et U_g le vecteur des coefficients de I_g dans la base tronquée des harmoniques sphériques. Les matrices A et G ne dépendent pas du groupe de fréquence considéré ; seules les valeurs de σ_g et B_g diffèrent entre les groupes. Le système global s'écrit alors :

$$\begin{cases} \frac{1}{c}\partial_t U_g + A\partial_r U_g + \frac{1}{r}GU_g = \sigma_g(B_g e_0 - U_g), & 1 \leq g \leq G, \\ \partial_t E_e = 4\pi \sum_{g=1}^G \sigma_g(\langle U_g, e_0 \rangle - B_g) + c\kappa(T_i - T_e), \\ \partial_t E_i = c\kappa(T_e - T_i). \end{cases} \quad (2.58)$$

On remarque en particulier que le couplage du rayonnement avec la matière se fait uniquement via les premières composantes des U_g . En définissant b_g et $\phi_{r,g}$, pour tout $1 \leq g \leq G$, tels que :

$$4\pi B_g = cb_g \phi_e \quad 4\pi \langle U_g, e_0 \rangle = c\phi_{r,g},$$

le couplage entre le rayonnement et la matière s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \phi_{r,g} + \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 F_g) = c\sigma_g(b_g \phi_e - \phi_{r,g}), \\ \partial_t E_e = \sum_{g=1}^G c\sigma_g(\phi_{r,g} - b_g \phi_e) + c\kappa(T_i - T_e), \\ \partial_t E_i = c\kappa(T_e - T_i). \end{cases} \quad (2.59)$$

Ce couplage est fortement non linéaire étant donné que ϕ_e est proportionnel à T_e^4 et E_i , E_e respectivement proportionnels à T_i et T_e .

2.11 Discrétisation

Dans cette section, on propose une méthode de discrétisation pour le système (2.58). On adopte une approche par séparation d'opérateur. On sépare la partie linéaire de la partie non linéaire. Ainsi, dans un premier temps, on résout numériquement le problème linéaire suivant :

$$\frac{1}{c}\partial_t U_g + A\partial_r U_g + \frac{1}{r}GU_g = -\sigma_g J e_0, \quad 1 \leq g \leq G, \quad (2.60)$$

où $J = \text{diag}(0, 1, \dots, 1)$. Dans ce dernier système, on a enlevé la partie non linéaire du couplage à la matière. Dans un second temps, on résout le couplage non linéaire décrit par le système (2.59). Pour la discrétisation de la partie linéaire (2.60), on utilise le

schéma décrit dans la partie précédente dont on a montré en particulier la stabilité. La discrétisation du système non linéaire est moins aisée. On adopte une approche implicite :

$$\begin{cases} \frac{\phi_{r,g}^{n+1} - \phi_{r,g}^n}{\Delta t} = c\sigma_g^{n+1}(b_g^{n+1}\phi_e^{n+1} - \phi_{r,g}^{n+1}), \\ \frac{E_e^{n+1} - E_e^n}{\Delta t} = \sum_{g=1}^G c\sigma_g^{n+1}(\phi_{r,g}^{n+1} - b_g^{n+1}\phi_e^{n+1}) + c\kappa^{n+1}(T_i^{n+1} - T_e^{n+1}), \\ \frac{E_i^{n+1} - E_i^n}{\Delta t} = c\kappa^{n+1}(T_e^{n+1} - T_i^{n+1}). \end{cases}$$

Le traitement implicite et la non linéarité impliquent qu'il est nécessaire d'utiliser une méthode itérative pour résoudre ce dernier système. Pour mettre en oeuvre cette méthode, on commence par linéariser le système par rapport aux variables $\phi_{r,g}$, $\phi_e = aT_e^4$ et $\phi_i = aT_i^4$. On pose alors les quantités suivantes :

$$\beta_e^{n+1} = \frac{\phi_e^{n+1} - \phi_e^n}{E_e^{n+1} - E_e^n} \quad \beta_i^{n+1} = \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{E_i^{n+1} - E_i^n}, \quad \delta_{ie} = \frac{T_i^{n+1} - T_e^{n+1}}{\phi_i^{n+1} - \phi_e^{n+1}}.$$

Le schéma s'écrit alors :

$$\begin{cases} \frac{\phi_{r,g}^{n+1} - \phi_{r,g}^n}{\Delta t} = c\sigma_g^{n+1}(b_g^{n+1}\phi_e^{n+1} - \phi_{r,g}^{n+1}), \\ \frac{\phi_e^{n+1} - \phi_e^n}{\Delta t} = \sum_{g=1}^G c\beta_e^{n+1}\sigma_g^{n+1}(\phi_{r,g}^{n+1} - b_g^{n+1}\phi_e^{n+1}) + c\beta_e^{n+1}\kappa^{n+1}\delta_{ie}^{n+1}(\phi_i^{n+1} - \phi_e^{n+1}), \\ \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} = c\beta_i^{n+1}\kappa^{n+1}\delta_{ie}^{n+1}(\phi_e^{n+1} - \phi_i^{n+1}). \end{cases}$$

À l'aide de ces trois équations, on peut exprimer ϕ_e^{n+1} de la manière suivante :

$$\phi_e^{n+1} = \frac{\alpha_1^{n+1}\phi_e^n + \alpha_2^{n+1}\phi_i^n + \sum_{g=1}^N \alpha_{3,g}^{n+1}\phi_r^n/b_g^{n+1}}{\alpha_1^{n+1} + \alpha_2^{n+1} + \sum_{g=1}^G \alpha_{3,g}^{n+1}}, \quad (2.61)$$

avec :

$$\alpha_1^{n+1} = 1, \quad \alpha_2^{n+1} = \frac{c\beta_e^{n+1}\kappa^{n+1}\delta_{ie}^{n+1}\Delta t}{1 + c\beta_i^{n+1}\kappa^{n+1}\delta_{ie}^{n+1}\Delta t}, \quad \alpha_{3,g}^{n+1} = \beta_e^{n+1} \frac{c\sigma_g^{n+1}b_g^{n+1}\Delta t}{1 + c\sigma_g^{n+1}\Delta t}.$$

On remarque que (2.61) est une combinaison convexe ce qui garantit la stabilité de l'itération. À partir de l'équation (2.61), on adopte le schéma itératif suivant où les coefficients α_i sont figés à chaque itération :

$$\phi_e^{p+1} = \frac{\alpha_1^p\phi_e^p + \alpha_2^p\phi_i^p + \sum_{g=1}^N \alpha_{3,g}^p\phi_r^p/b_g^p}{\alpha_1^p + \alpha_2^p + \sum_{g=1}^G \alpha_{3,g}^p}.$$

Une fois la température T_e^{p+1} calculée, on calcule les autres quantités via les formules suivantes :

$$\frac{\phi_{r,g}^{p+1}}{b_g^p} = \frac{(\phi_{r,g}^n/b_g^p) + c\sigma_g^p \Delta t \phi_e^{p+1}}{1 + c\sigma_g^p \Delta t}, \quad 1 \leq g \leq G,$$

$$\phi_i^{p+1} = \frac{\phi_i^n + c\beta_i^p \kappa^p \delta_{ie}^p \Delta t \phi_e^{p+1}}{1 + c\beta_i^p \kappa^p \delta_{ie}^p \Delta t}.$$

Ces deux formules sont des combinaisons convexes ce qui garantit encore la stabilité sur une itération. On arrête la processus itératif lorsqu'on estime la convergence atteinte. Concrètement, on se fixe un critère d'arrêt de la forme suivante :

$$|T_{e,i,r}^{p+1} - T_{e,i,r}^p| < \epsilon T_{e,i,r}^p,$$

où ϵ est un paramètre fixé selon la précision voulue (typiquement 10^{-15}). L'algorithme présenté ici est stable sur chaque itération car on fait uniquement des combinaisons convexes. En revanche, il est possible que l'algorithme ne converge pas vers la bonne limite, ou ne converge pas tout simplement. En effet, lorsque l'on recherche la racine d'une fonction à l'aide de l'algorithme du point fixe, il faut s'assurer que cette fonction soit contractante dans un voisinage de cette racine et que l'on choisisse la valeur initiale du processus itératif dans ce voisinage. Cette situation peut parfois se rencontrer en pratique. Une étude plus détaillée doit être effectuée sur le sujet pour s'assurer de la bonne convergence de l'algorithme dans toutes les situations possibles, ou, du moins, sous une condition raisonnable.

Chapitre 3

Analyse mathématique et hiérarchie de modèles d'hydrodynamique radiative

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux problèmes d'hydrodynamique radiative, c'est-à-dire aux problèmes de couplage entre un rayonnement et un fluide en mouvement. Une étude bibliographique sur la modélisation de ces problèmes montre qu'il n'y a pas de consensus entre les auteurs sur les équations à utiliser pour modéliser de tels problèmes. Partant de ce constat, on concentre uniquement notre étude sur l'analyse mathématique des différents modèles. La discrétisation des modèles est laissée en perspective de travail. Ce chapitre est donc dédié à l'établissement d'une hiérarchie de modèles issus de la littérature et bien adaptés à la FCI. On étudie particulièrement la prise en compte de chaque modèle des effets d'entraînement matière, appelés aussi effets comobiles. Les effets de géométrie sphérique ne sont pas traités si bien que l'on se place, dans tout ce chapitre, en géométrie $1D$ plan. Pour chaque modèle étudié, on s'intéresse aux propriétés suivantes : conservation de l'impulsion, conservation de l'énergie, existence d'une entropie mathématique compatible avec les termes sources et comportement dans la limite de diffusion. L'analyse de ces propriétés est justifiée à plusieurs égards. Tout d'abord, la vérification des lois de conservation satisfaites par le modèle nous informe sur sa cohérence physique (respect des principes de bases de la physique) et, d'un point de vue mathématique, sur les conditions de saut des solutions faibles. De plus, outre le lien étroit entre entropies physique et mathématique, l'existence d'une entropie mathématique compatible avec les termes sources confère au modèle certaines propriétés capitales et notamment la stabilité des solutions en norme L^2 . L'étude de la limite de diffusion des différents modèles vise à vérifier qu'ils restituent la limite hydrodynamique radiative de diffusion admise dans la littérature.

Dans notre comparaison de modèles, l'accent est principalement mis sur les différences entre les modèles newtoniens et les modèles relativistes. Cela nous permet de discuter quant à l'intérêt d'adopter des modèles relativistes pour simuler des problèmes d'hydrodynamique radiative. On montre en particulier que le cadre relativiste permet de garantir

à la fois le caractère entropique et la précision en v/c du modèle ce qui n'est pas le cas des modèles newtoniens. Outre cet avantage, on souhaite *in fine* comparer les solutions issues des modèles relativistes d'une part et des modèles newtoniens d'autre part afin de quantifier plus précisément les différences entre les deux types de modèles.

Rappelons qu'il existe plusieurs familles de modèles d'hydrodynamique radiative. Tout d'abord, les modèles eulériens (encore appelés dans la littérature *fixed-frame models*, *eulerian-frame models* ou *inertial-frame models*) dans lesquels toutes les quantités physiques sont mesurées dans le référentiel fixe (galiléen) du laboratoire. Ces modèles ont l'avantage de s'écrire sous la forme d'un système de lois de bilan, ce qui est appréciable tant du point de vue mathématique que numérique. Cependant, ces modèles ne sont guère exploitables en pratique car les valeurs accessibles des opacités ne sont connues que dans le référentiel du fluide. La deuxième famille de modèles est la classe des modèles comobiles (appelés *comobile-frame models* dans la littérature). Leur étude est notamment effectuée dans [MWM99] et [MW86]. Dans ces modèles, on se place dans un référentiel particulier, le référentiel comobile. Dans ce référentiel, la direction et la fréquence des photons sont évaluées dans le référentiel en mouvement lié au fluide. Les variables de temps et d'espace sont, quant à elles, toujours évaluées dans le référentiel fixe lié au laboratoire. Lorsqu'on se place dans le référentiel comobile, les valeurs des opacités sont directement accessibles. En revanche, avec cette approche, des produits non conservatifs apparaissent, posant des difficultés mathématique et numérique. La troisième famille de modèles rassemble les modèles *mixed-frame*, où les quantités physiques sont toutes mesurées dans le référentiel fixe du laboratoire à l'exception des opacités qui sont mesurées dans le référentiel du fluide. Cette approche a l'avantage de préserver la structure du modèle sous forme d'un système de lois de bilan, mais complexifie les expressions des termes sources par rapport à ceux des modèles comobiles. À nos yeux, ces derniers modèles sont ceux qui présentent le plus de propriétés satisfaisantes (conservation, entropie, limite de diffusion, voir plus haut), c'est pourquoi notre choix s'est porté sur eux.

Un deuxième objectif de ce chapitre est d'identifier les éventuels défauts pour chaque modèle étudié et de proposer des corrections pour pallier ceux-ci. Enfin, on cherche à déterminer des modèles P_N de référence, possédant les bonnes propriétés physiques et mathématiques, dans l'optique de leur analyse numérique. Le plan de ce chapitre s'articule alors selon les points suivants. Dans un premier temps, on rappelle quelques éléments de la théorie du transfert radiatif et on introduit les notations mathématiques. Ici, on s'inspire de [MWM99] et [Cas04]. On procède ensuite à l'analyse mathématique des modèles d'hydrodynamique radiative non relativistes, *i.e* dans le cadre de la mécanique newtonienne. Tout d'abord, on effectue l'analyse des modèles de transport, *i.e* sans approximation angulaire, spectraux. Puis, on étend cette analyse dans le cas « gris », *i.e* moyenné en fréquence. On s'intéresse ensuite aux modèles approchés dans l'approximation angulaire P_1 , puis P_N . La même analyse est enfin effectuée pour des modèles relativistes.

3.1 Transformations de Lorentz pour le rayonnement

Lorsqu'un photon se déplace dans la direction \mathbf{n} avec une fréquence ν , mesurées par un observateur fixe par rapport au laboratoire, il est vu, par un observateur attaché à une particule fluide, avec une direction \mathbf{n}_0 et une fréquence ν_0 différentes. Ces phénomènes sont respectivement appelés *effet d'aberration* et *effet Doppler*. Les lois de transformation pour la fréquence et la direction s'obtiennent en considérant le vecteur espace-temps énergie-impulsion des photons.

Définition 3.1. Le 4-vecteur énergie-impulsion des photons s'exprime avec la fréquence ν et la direction \mathbf{n} des photons :

$$M^\alpha = \frac{h\nu}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{n} \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

et est covariant par transformation de Lorentz ([MWM99] §89). Cette dernière propriété permet de dériver les expressions des décalages en fréquence et en direction dus aux effets Doppler et d'aberration.

Lemme 3.1. Les lois de transformation reliant la fréquence et la direction mesurées dans le référentiel comobile et dans le référentiel du laboratoire s'écrivent (voir [MWM99] §89) :

$$\begin{cases} \nu_0 = \gamma\nu(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c), \\ \mathbf{n}_0 = (\nu/\nu_0)\{\mathbf{n} - \gamma(\mathbf{v}/c)[1 - (\gamma\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)/(\gamma + 1)]\}, \end{cases} \quad (3.2)$$

où $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ est appelé *facteur de Lorentz*. Les relations inverses s'obtiennent trivialement en substituant \mathbf{v} en $-\mathbf{v}$. Au premier ordre en v/c , ces relations se réduisent en :

$$\begin{cases} \nu_0 = \nu(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c) + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right), \\ \mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{n} - \mathbf{v}/c}{1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c} + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right). \end{cases} \quad (3.3)$$

Remarque 3.1. Dans le cas particulier d'un mouvement selon l'axe z ($\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$), (3.2) devient :

$$\begin{cases} \nu_0 = \gamma\nu(1 - \mu v/c), \\ \mu_0 = (\mu - v/c)/(1 - \mu v/c), \\ (1 - \mu_0^2)^{1/2} = (1 - \mu^2)^{1/2}/\gamma(1 - \mu v/c), \\ \Phi_0 = \Phi, \end{cases} \quad (3.4)$$

avec μ et Φ respectivement le cosinus de l'angle polaire et l'angle azimutal de \mathbf{n} relativement à \mathbf{e}_z (et de même pour leurs homologues dans le référentiel comobile).

Lemme 3.2. Des équations précédentes, il vient l'égalité entre les mesures suivantes (voir aussi [MWM99] §89) :

$$\nu d\nu d\omega = \nu_0 d\nu_0 d\omega_0, \quad (3.5)$$

où l'on a noté $d\omega$ et $d\omega_0$ les éléments infinitésimaux d'angle solide associés aux directions \mathbf{n} et \mathbf{n}_0 . Ce résultat prouve l'invariance de la mesure $\nu d\nu d\omega$ par transformation de Lorentz. Ce résultat très important est utilisé à de nombreuses reprises dans la suite.

Transformation de l'intensité et des coefficients matériels À cause des effets Doppler et d'aberration, deux observateurs différents respectivement liés au référentiel du laboratoire et au référentiel comobile ne perçoivent pas la même intensité radiative portée par les photons, ni les mêmes coefficients matériels. Les lois de transformation pour ces 3 quantités ne s'obtiennent pas aussi facilement que les décalages en fréquence et en direction dérivées précédemment. Sans démonstration, on donne les relations reliant ces quantités exprimées dans les deux référentiels différents.

Lemme 3.3. Les lois de transformation pour l'intensité radiative I , le coefficient d'émission η et le coefficient d'extinction χ s'écrivent (voir [MWM99] §90) :

$$I(\mathbf{n}, \nu) = (\nu/\nu_0)^3 I_0(\mathbf{n}_0, \nu_0). \quad (3.6)$$

$$\eta(\mathbf{n}, \nu) = (\nu/\nu_0)^2 \eta_0(\nu_0). \quad (3.7)$$

$$\chi(\mathbf{n}, \nu) = (\nu_0/\nu) \chi_0(\nu_0). \quad (3.8)$$

Remarque 3.2. Les quantités I/ν^3 , η/ν^2 et $\nu\chi$ sont invariantes par transformation de Lorentz et sont appelées respectivement intensité invariante, émission invariante et extinction invariante.

Lemme 3.4. Les relations (3.6), (3.7) et (3.8) nous permettent d'exprimer la quantité $\eta - \chi I$ directement en fonction des opacités du matériau σ_a et σ_s , de la planckienne B et de l'intensité radiative I (voir [BD04] et [LMH99]).

$$\begin{aligned} \eta(\mathbf{n}, \nu) - \chi(\mathbf{n}, \nu) I(\mathbf{n}, \nu) &= \frac{\nu_0}{\nu} \sigma_a(\nu_0) \left[\left(\frac{\nu}{\nu_0} \right)^3 B(T, \nu_0) - I(\mathbf{n}, \nu) \right] \\ &+ \frac{\nu_0}{\nu} \sigma_s(\nu_0) \left[\left(\frac{\nu}{\nu_0} \right)^3 \oint_{4\pi} \frac{\nu_0}{\nu'} I(\nu', \mathbf{n}') \frac{d\omega'}{4\pi} - I(\mathbf{n}, \nu) \right], \end{aligned} \quad (3.9)$$

avec

$$\nu' = \nu \frac{1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c}{1 - \mathbf{n}' \cdot \mathbf{v}/c}, \quad (3.10)$$

où l'on a séparé la contribution des effets thermiques et des effets de scattering.

Transformation des moments angulaires de l'intensité On étudie ici les transformations de Lorentz pour la densité d'énergie radiative E , le vecteur flux d'énergie \mathbf{F} et le tenseur de pression \mathbf{P} . Pour dériver ces lois de transformation, une approche consiste à prendre les moments intégrés en fréquence de la relation (3.6) et à effectuer les développements mathématiques nécessaires. Cependant, on adopte dans cette section une approche différente utilisant le tenseur énergie-pressure (défini ci-dessous) et permettant une meilleure interprétation physique.

Définition 3.2. On définit le *tenseur énergie-pressure* comme l'extension en dimension 4 (espace-temps), covariante par transformation de Lorentz, du tenseur de pression radiative \mathbf{P} , et on note :

$$R^{\alpha\beta} = \frac{1}{c} \int_0^{+\infty} \oint_{4\pi} I(\mathbf{n}, \nu) n^\alpha n^\beta d\omega d\nu. \quad (3.11)$$

Le tenseur énergie-pressure se réécrit avec la densité, le vecteur flux et le tenseur de pression d'énergie radiative.

$$R^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} E & \mathbf{F}^T/c \\ \mathbf{F}/c & \mathbf{P} \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Grâce à cette dernière écriture et à la propriété essentielle de covariance par transformation de Lorentz du tenseur $R^{\alpha\beta}$, on peut sans difficulté dériver les lois de transformation pour les moments intégrés en fréquence de l'intensité radiative.

Lemme 3.5. Les lois de transformation pour la densité, le vecteur flux et le tenseur de pression d'énergie radiative s'écrivent (voir [MWM99] §91) :

$$E = \gamma^2 \left(E_0 + 2\frac{v_i}{c^2} F_0^i + \frac{v_i v_j}{c^2} P_0^{ij} \right), \quad (3.13)$$

$$F^i = \gamma \left\{ F_0^i + \gamma E_0 v^i + v_j P_0^{ij} + \frac{\gamma}{\gamma+1} [(2\gamma+1)v_j F_0^j + \gamma v_j v_k P_0^{jk}] \frac{v^i}{c^2} \right\}, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} P^{ij} = & P_0^{ij} + \frac{\gamma}{c^2} (v^i F_0^j + v^j F_0^i) + \gamma^2 E_0 \frac{v^i v^j}{c^2} \\ & + \frac{\gamma^2}{c^2(\gamma+1)} \left(v^j v_k P_0^{ik} + v^i v_k P_0^{kj} + 2\gamma v_k F_0^k \frac{v^i v^j}{c^2} \right) \\ & + \left(\frac{\gamma^2}{c^2(\gamma+1)} \right)^2 (v_k v_l P_0^{kl}) v^i v^j, \end{aligned} \quad (3.15)$$

où l'on a utilisé la notation d'Einstein pour les sommes d'indices. En 1D plan, on a notamment :

$$E = \gamma^2 \left(E_0 + 2\frac{v}{c^2} F_0 + \frac{v^2}{c^2} P_0 \right), \quad (3.16)$$

$$F = (2\gamma^2 - 1)F_0 + \gamma^2(E_0 + P_0)v, \quad (3.17)$$

$$P = \gamma^2 P_0 + \frac{2v}{c^2} \gamma^2 F_0 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} E_0. \quad (3.18)$$

Lemme 3.6. À l'ordre 1 en v/c , les relations (3.13), (3.14) et (3.15) se réduisent à :

$$E = E_0 + 2\frac{\mathbf{v}}{c^2} \cdot \mathbf{F}_0 + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right), \quad (3.19)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + E_0\mathbf{v} + P_0\mathbf{v} + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right), \quad (3.20)$$

$$\mathbf{P} = P_0 + \frac{1}{c^2}(\mathbf{F}_0 \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{F}_0) + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right). \quad (3.21)$$

Remarque 3.3. Les lois de transformation dérivées ci-dessus s'appliquent uniquement pour les moments de l'intensité radiative intégrés en fréquence. Le calcul pour les moments monochromatiques est moins aisé car ceux-ci ne peuvent pas s'exprimer à l'aide d'un 4-tenseur covariant par transformation de Lorentz. Le point clé ici est la propriété d'invariance Lorentzienne de la mesure $\nu d\nu d\omega$ que ne possède pas la mesure $d\omega$. On peut néanmoins développer au premier ordre en v/c la relation (3.6), puis prendre les moments successifs de l'équation obtenue. Les développements mathématiques sont détaillés dans [MWM99], §99, dans le cas unidimensionnel et les relations obtenues s'écrivent :

$$E_{\nu,0} = E_\nu - (2v/c^2)F_\nu + (v/c^2)\partial_\nu(\nu F_\nu), \quad (3.22)$$

$$F_{\nu,0} = F_\nu - (E_\nu + P_\nu)v + v\partial_\nu(\nu P_\nu), \quad (3.23)$$

$$P_{\nu,0} = P_\nu + (2v/c^2)F_\nu + (v/c^2)\partial_\nu(\nu Q_\nu), \quad (3.24)$$

où Q_ν est le troisième moment monochromatique de l'intensité radiative en géométrie unidimensionnelle. Cette approche par développement de Taylor n'est cependant pas recommandée car elle suppose implicitement que $v/c \ll \Delta\nu/\nu$ où $\Delta\nu$ est la largeur de la plus petite variation du spectre ; hypothèse qui peut être violée dans certaines situations physiques (voir [Cas04]).

Transformation des taux de transfert des densités d'énergie et de quantité de mouvement En prenant la divergence covariante du tenseur énergie-pression, on définit un nouveau vecteur espace-temps appelé vecteur densité de force G^α :

$$R^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = G^\alpha. \quad (3.25)$$

Avec l'expression du tenseur énergie-pression (3.12), on remarque que l'équation (3.25) correspond aux lois de conservation avec termes sources pour la densité d'énergie et de quantité de mouvement radiatives. Ainsi, on en déduit que le vecteur G^α représente, à un facteur près, le taux d'énergie-impulsion par unité de volume transmise de la matière au rayonnement.

Définition 3.3. Le vecteur densité de force G^α est un vecteur espace-temps, covariant par transformation de Lorentz, dont l'expression est (voir [MWM99] §91) :

$$G^\alpha = \begin{pmatrix} G^0 \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

où G^0 et \mathbf{g} sont définis par (1.26) et (1.27). La propriété de covariance par transformation de Lorentz de G^α nous permet alors de dériver facilement les lois de transformation pour G^0 et \mathbf{g} .

Lemme 3.7. Les lois de transformation pour les quantités G^0 et \mathbf{g} s'écrivent (voir [MWM99] §91 et [Cas04] chapitre 6) :

$$G^0 = \gamma \left(G_0^0 + \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{g}_0 \right), \quad \mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{g}_0 + \gamma \frac{\mathbf{v}}{c} G_0^0. \quad (3.27)$$

Au premier ordre en v/c , ces relations se réduisent à :

$$G^0 = G_0^0 + \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{g}_0, \quad \mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \frac{\mathbf{v}}{c} G_0^0. \quad (3.28)$$

Ces égalités sont d'une extrême importance puisqu'elles donnent une relation simple entre (G^0, \mathbf{g}) , dont les expressions analytiques ne sont pas *a priori* connues, et (G_0^0, \mathbf{g}_0) dont on connaît les expressions analytiques :

$$G_0^0 = \frac{1}{c} \int_0^{+\infty} (4\pi\eta_0 - \chi_0 c E_{\nu_0}) d\nu_0, \quad \mathbf{g}_0 = -\frac{1}{c} \int_0^{+\infty} \chi_0 \mathbf{F}_{\nu_0} d\nu_0, \quad (3.29)$$

où l'on a utilisé l'isotropie des coefficients matériels dans le référentiel comobile η_0 et χ_0 . Les expressions ci-dessus se réécrivent simplement à l'équilibre thermodynamique local (ÉTL) :

$$G_0^0 = \frac{1}{c} \int_0^{+\infty} \sigma_a (4\pi B - c E_{\nu_0}) d\nu_0, \quad \mathbf{g}_0 = -\frac{1}{c} \int_0^{+\infty} \sigma_t \mathbf{F}_{\nu_0} d\nu_0. \quad (3.30)$$

Dans l'approximation grise, on a :

$$G_0^0 = \sigma_a (aT^4 - E_0), \quad \mathbf{g}_0 = -\frac{1}{c} \sigma_t \mathbf{F}_0. \quad (3.31)$$

Remarque 3.4. De même que pour les moments de l'intensité radiative, les relations de transformation ci-dessus ne sont valables que pour les quantités intégrées en fréquence.

Lemme 3.8. En injectant (3.31) dans (3.27) et en utilisant les lois de transformation pour les moments de l'intensité radiative (3.13), (3.14) et (3.15), on obtient, dans l'approximation grise, les expressions de G^0 et \mathbf{g} en fonction des opacités du matériau σ_a , σ_s et des moments de l'intensité dans le référentiel du laboratoire :

$$G^0 = \gamma \left[\sigma_a \left\{ aT^4 - \gamma^2 \left(E - 2 \frac{v_i}{c^2} F^i + \frac{v_i v_j}{c^2} P^{ij} \right) \right\} - \frac{v_i}{c^2} \sigma_t \gamma \left\{ F^i - \gamma E v^i - v_j P^{ij} - \frac{\gamma}{\gamma + 1} (-(2\gamma + 1) v_j F^j + \gamma v_j v_k P^{jk}) \frac{v^i}{c^2} \right\} \right], \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned}
g^i = & -\frac{1}{c}\sigma_t\gamma \left[F^i - \gamma E v^i - v_j P^{ij} - \frac{\gamma}{\gamma+1}(-(2\gamma+1)v_j F^j + \gamma v_j v_k P^{jk}) \frac{v^i}{c^2} \right] \\
& - \frac{1}{c}\sigma_t\gamma(\gamma-1) \frac{v_i v_j}{v^2} \left[F^j - \gamma E v^j - v_k P^{kj} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \left\{ -(2\gamma+1)v_k F^k + \gamma v_k v_\ell P^{k\ell} \right\} \frac{v^j}{c^2} \right] \\
& + \gamma\sigma_a \frac{v^i}{c} \left[aT^4 - \gamma^2 \left\{ E - 2\frac{v^j}{c^2} F^j + \frac{v_j v_k}{c^2} P^{jk} \right\} \right].
\end{aligned} \tag{3.33}$$

En 1D plan, ces relations s'écrivent :

$$G^0 = \gamma\sigma_a[aT^4 - E] + \gamma\sigma_a \frac{v}{c^2} F - \gamma \frac{v}{c^2} \sigma_s [(2\gamma^2 - 1)F - \gamma^2(E + P)v], \tag{3.34}$$

$$g = -\frac{1}{c}\gamma\sigma_a F + \gamma\sigma_a \frac{v}{c} [aT^4 + P] - \frac{1}{c}\gamma\sigma_s [(2\gamma^2 - 1)F - \gamma^2(E + P)v]. \tag{3.35}$$

Lemme 3.9. En décomposant ces relations en puissance de v/c , on a :

$$G^0 = \sigma_a(aT^4 - E) + \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot (\sigma_a - \sigma_s) \frac{\mathbf{F}}{c} + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right), \tag{3.36}$$

$$\mathbf{g} = -\frac{1}{c}\sigma_t \mathbf{F} + \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot [\sigma_t(E\mathbf{l} + P) + \sigma_a(aT^4 - E)\mathbf{l}] + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right). \tag{3.37}$$

Remarque 3.5. Ces dernières relations ne sont valables que dans le cadre de l'approximation grise. Dans le cas général, on ne peut pas effectuer le même calcul puisqu'on ne dispose que des lois de transformation pour les quantités intégrées en fréquence. On ne peut donc pas exprimer de manière exacte les quantités G^0 et \mathbf{g} en fonction des opacités spectrales et des moments de l'intensité dans le référentiel du laboratoire. En revanche, au premier ordre en v/c , les calculs sont possibles à l'aide des relations (3.22), (3.23) et (3.24).

Équation de transfert dans le référentiel comobile La dérivation de l'équation de transfert dans le référentiel comobile consiste à décrire le comportement du rayonnement tel qu'il est perçu par un observateur lié au référentiel du fluide. Toute la difficulté de cette approche réside dans le fait que le référentiel comobile n'est pas inertiel à cause des variations spatio-temporelles de la vitesse du fluide. Ainsi, un photon, vu par un observateur fixe par rapport à ce référentiel, ne se déplace pas en ligne droite et à fréquence fixée, comme c'est le cas dans tout autre référentiel inertiel, mais selon une trajectoire curviligne au cours de laquelle sa fréquence varie. Il en résulte ainsi l'apparition de dérivées en direction et en fréquence dans l'équation de transfert. La raison principale justifiant l'étude du rayonnement dans le référentiel comobile réside dans la modélisation des interactions entre matière et rayonnement, beaucoup plus naturelle dans ce référentiel. En effet, à cause des effets Doppler et d'aberration, c'est uniquement dans le référentiel comobile que les coefficients matériels possèdent leur valeur donnée par la physique atomique dont

l'expression analytique est connue. De plus, le caractère isotrope des coefficients matériels dans le référentiel comobile offre un avantage évident pour le modèle mathématique résultant comme du point de vue de l'approximation numérique. L'équation de transfert dans le référentiel comobile est particulièrement complexe à formuler. D'ailleurs, dans la littérature, on ne trouve pas de formulation générale de cette équation qui soit valable pour tout système de coordonnées, pour une dimension quelconque du problème étudié et pour tout type d'écoulement. Les formulations les plus générales sont données par [Cas04] chapitre 6 et [MWM99] §95. Dans le premier cas, on a une formulation générale de l'équation uniquement dans le cas d'un fluide non relativiste (développement au premier ordre en v/c), alors que dans le second, l'équation exacte est donnée seulement dans le cas d'un problème à symétrie sphérique et planaire. Dans cette section, on présente uniquement l'équation de transfert dans le référentiel comobile en 1D plan, comme exposée dans [MWM99] §95, et on s'intéresse à ses moments angulaires intégrés en fréquence. Cette équation s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \frac{\gamma}{c}(1 + \beta\mu_0)\partial_t I_0 + \gamma(\mu_0 + \beta)\partial_x I_0 \\
& - \partial_{\mu_0} \left\{ \gamma^3(1 - \mu_0^2) \left[(\mu_0 + \beta)\partial_x \beta + \frac{1}{c}(1 + \beta\mu_0)\partial_t \beta \right] I_0 \right\} \\
& - \partial_{\nu_0} \left\{ \gamma^3 \nu_0 \mu_0 \left[(\mu_0 + \beta)\partial_x \beta + \frac{1}{c}(1 + \beta\mu_0)\partial_t \beta \right] I_0 \right\} \\
& + \gamma^3 \left\{ (1 + \mu_0^2 + 2\beta\mu_0)\partial_x \beta + \frac{1}{c}[2\mu_0 + \beta(1 + \mu_0^2)]\partial_t \beta \right\} I_0 = \eta_0 - \chi_0 I_0,
\end{aligned} \tag{3.38}$$

où l'on a noté $\beta = v/c$, et où :

$$\begin{aligned}
\eta_0(\mu_0, \nu_0) - \chi_0(\nu_0)I_0(\mu_0, \nu_0) &= \sigma_a(\nu_0)(B(\nu_0, T) - I(\mu_0, \nu_0)) \\
&+ \sigma_s(\nu_0) \left(\int_{-1}^1 I_0(\mu_0, \nu_0) \frac{d\mu_0}{2} - I_0(\mu_0, \nu_0) \right).
\end{aligned} \tag{3.39}$$

On remarque en particulier l'apparition des dérivées en fréquence et en direction qui n'étaient pas présentes dans l'équation de transfert dans le référentiel du laboratoire (1.19) et rendent compte des trajectoires curvilignes des photons dans le référentiel comobile. En intégrant (3.38) et en prenant les deux premiers moments angulaires, on obtient les équations vérifiées par la densité et le flux d'énergie radiative dans le référentiel comobile :

$$\begin{aligned}
& \gamma \left(\partial_t E_0 + \frac{v}{c^2} \partial_t F_0 \right) + \gamma (\partial_x F_0 + v \partial_x E_0) \\
& + \gamma^3 \left[\left(E_0 + P_0 + \frac{2v}{c^2} F_0 \right) \partial_x v + \frac{1}{c^2} (2F_0 + vE_0 + vP_0) \partial_t v \right] \\
& = 4\pi \int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 (\eta_0 - \chi_0 I_0) \frac{d\mu_0}{2} d\nu_0 = cG_0^0,
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\gamma}{c^2} (\partial_t F_0 + v \partial_t P_0) + \gamma \left(\partial_x P_0 + \frac{v}{c^2} \partial_x F_0 \right) \\
& + \frac{\gamma^3}{c^2} \left[(2F_0 + vE_0 + vP_0) \partial_x v + \left(E_0 + P_0 + \frac{2v}{c^2} F_0 \right) \partial_t v \right] \\
& = \frac{4\pi}{c} \int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 (\eta_0 - \chi_0 I_0) \mu_0 \frac{d\mu_0}{2} d\nu_0 = g_0,
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Ces équations ne s'écrivent pas sous forme conservative comme c'est le cas dans le référentiel du laboratoire. Ainsi, si l'approche comobile permet de gagner en simplicité au niveau des termes sources, cela se fait au détriment de la structure mathématique des équations. On a cependant les lois de bilans suivantes pour l'énergie et la quantité de mouvement radiative :

$$\partial_t \left[\gamma^2 \left(E_0 + \frac{2v}{c^2} F_0 + \frac{v^2}{c^2} P_0 \right) \right] + \partial_x \left[(2\gamma^2 - 1)F_0 + \gamma^2(E_0 + P_0)v \right] = c\gamma \left(G_0^0 + \frac{v}{c} g_0 \right), \tag{3.42}$$

$$\partial_t \left[(2\gamma^2 - 1)F_0 + \gamma^2(E_0 + P_0)v \right] + \partial_x \left[\gamma^2 P_0 + \frac{2v}{c^2} \gamma^2 F_0 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} E_0 \right] = \gamma \left(g_0 + \frac{v}{c} G_0^0 \right), \tag{3.43}$$

Remarque 3.6. Dans les équations ci-dessus, les variables de temps et d'espace sont inchangées par rapport à celles dans le référentiel du laboratoire. Ainsi, il s'agit bien de l'espace-temps vu par un observateur lié au référentiel du laboratoire. Cette subtilité est d'ailleurs la raison de la structure compliquée des équations. En effet, si l'on avait strictement opéré une transformation de Lorentz de l'équation de transfert, nous aurions obtenu une équation identique en vertu de l'invariance lorentzienne de l'équation. En gardant les variables spatio-temporelles du référentiel du laboratoire, de nouveaux termes apparaissent dans les dérivées en temps et en espace.

3.2 Modèles classiques

3.2.1 Équations d'Euler classiques

Les équations modélisant la dynamique d'un fluide idéal non relativiste s'obtiennent à l'aide de bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie dans un volume du domaine d'étude. Ces bilans, sous forme intégrale, se transforment localement en lois de conservation, appelées *équations d'Euler*. Ces équations sont étudiées entre autres dans [GR96] chapitre 1. En géométrie 1D plane, elles s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho e v + p v) = 0. \end{cases} \tag{3.44}$$

Dans (3.44), $\rho = \rho(x, t)$ représente la masse volumique, $v = v(x, t)$ la vitesse, $p = p(x, t)$ la pression, $\varepsilon = \varepsilon(x, t)$ l'énergie interne spécifique et $e = e(x, t) = \varepsilon + v^2/2$ l'énergie totale (interne + cinétique) spécifique du fluide. Ces 3 lois de conservation expriment respectivement la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale du fluide. On ajoute de plus au système (3.44) une *équation d'état* de la forme :

$$p = p(\rho, \varepsilon). \quad (3.45)$$

Le système formé par (3.44) et (3.45) est bien fermé. En pratique, l'équation d'état est donnée par la physique soit sous forme de tables de valeurs, soit par une formule analytique issue d'une modélisation du fluide à l'échelle atomique. Par exemple, dans l'approximation du gaz parfait, l'équation d'état s'écrit simplement :

$$p = \Gamma \rho \varepsilon, \quad (3.46)$$

où Γ est une constante strictement positive. D'autres formules analytiques pour l'équation d'état, correspondant à des modélisations atomiques différentes de celle du gaz parfait, existent néanmoins. De plus, on sait qu'en l'absence de termes sources, les solutions classiques de (3.44) vérifient une loi de conservation supplémentaire :

$$\partial_t(\rho s) + \partial_x(\rho s v) = 0, \quad (3.47)$$

où $s = s(x, t)$ désigne l'entropie thermodynamique spécifique du fluide définie par la relation :

$$T ds = d\varepsilon + p d\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad (3.48)$$

avec $T = T(x, t)$ la température du fluide. Lorsque l'équation d'état est bien choisie, ρs est une fonction strictement concave par rapport à (ρ, v, ε) , ce qui montre le caractère entropique du système d'équations (3.44).

3.2.2 Modèle de transport spectral

Dans cette partie, on étudie un modèle transport classique spectral construit en couplant les équations d'Euler classiques avec l'équation de transfert. Ce modèle est étudié entre autres dans [BD04]. Le modèle s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + p) = -g, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho e v + p v) = -c G^0, \\ \frac{1}{c} \partial_t I + \mu \partial_x I = S, \end{cases} \quad (3.49)$$

où les expressions des termes sources sont celles données par les transformations de Lorentz exactes et s'écrivent (en l'absence de scattering) :

$$S(\mu, \nu) = \gamma \left(1 - \mu \frac{v}{c}\right) \sigma_a(\nu_0) \left[B\left(\nu, \frac{T}{\gamma(1 - \mu \frac{v}{c})}\right) - I(\mu, \nu) \right], \quad (3.50)$$

$$G^0 = \frac{4\pi}{c} \int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 S(\mu, \nu) \frac{d\mu}{2} d\nu, \quad g = \frac{4\pi}{c} \int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 S(\mu, \nu) \mu \frac{d\mu}{2} d\nu. \quad (3.51)$$

On remarque tout d'abord que le système d'équations (3.49) conserve bien l'énergie et l'impulsion totale. En effet, en sommant le moment angulaire d'ordre 0 intégré en fréquence de l'équation de transport des photons et l'équation d'Euler sur l'énergie, on obtient la loi de conservation pour l'énergie totale :

$$\partial_t(\rho e + E) + \partial_x(\rho e v + p v + F) = 0. \quad (3.52)$$

De la même manière, la somme du moment d'ordre 1 intégré en fréquence de l'équation de transport des photons et de l'équation d'Euler sur l'impulsion donne la loi de conservation pour l'impulsion totale :

$$\partial_t(\rho v + F/c^2) + \partial_x(\rho v^2 + p + P) = 0. \quad (3.53)$$

On étudie à présent la structure entropique du système d'équations (3.49). Conformément à [BD04], on introduit les définitions suivantes pour l'entropie radiative et le flux d'entropie radiative.

Définition 3.4. L'entropie $S_r = S_r(x, t)$ et le flux d'entropie radiative $Q_r = Q_r(x, t)$ sont définis par les expressions suivantes :

$$S_r = -4\pi \frac{2k}{c^3} \int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 \nu^2 [n \log(n) - (n+1) \log(n+1)] \frac{d\mu}{2} d\nu, \quad (3.54)$$

$$Q_r = -4\pi \frac{2k}{c^2} \int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 \nu^2 [n \log(n) - (n+1) \log(n+1)] \mu \frac{d\mu}{2} d\nu, \quad (3.55)$$

avec $n = \frac{c^2}{2h} \frac{I}{\nu^3}$. On vérifie (voir [BD04]) que S_r ainsi définie est une fonction strictement concave de l'intensité radiative I .

On considère une solution classique de (3.49). Celle-ci vérifie la loi de bilan d'entropie radiative :

$$\partial_t S_r + \partial_x Q_r = -4\pi \frac{k}{h} \int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 \frac{1}{\nu} \log\left(\frac{n}{n+1}\right) S(\mu, \nu) \frac{d\mu}{2} d\nu, \quad (3.56)$$

et la loi de bilan pour l'entropie thermodynamique :

$$\partial_t(\rho s) + \partial_x(\rho s v) = -\frac{c}{T} \left(G^0 - \frac{v}{c} g \right) = -\frac{4\pi}{T} \int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 \left(1 - \mu \frac{v}{c} \right) S(\mu, \nu) \frac{d\mu}{2} d\nu. \quad (3.57)$$

Finalement, en sommant ces deux bilans d'entropie, on obtient la loi de bilan pour l'entropie totale du système, vérifiée par toute solution classique de (3.49) :

$$\partial_t(\rho s + S_r) + \partial_x(\rho s v + Q_r) = W, \quad (3.58)$$

où on a noté $W = W(x, t)$ la production totale d'entropie du système (3.44) et qui vaut :

$$W = -4\pi \int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 \left[\frac{1 - \mu \frac{v}{c}}{T} + \frac{k}{h\nu} \log \left(\frac{n}{n+1} \right) \right] S(\mu, \nu) \frac{d\mu}{2} d\nu. \quad (3.59)$$

On a alors le résultat suivant, issu de [BD04].

Propriété 3.1. En utilisant l'expression (3.50) pour le terme source S , la production d'entropie W s'exprime comme la somme de deux termes :

$$W = W_0 + \delta W, \quad (3.60)$$

où $W_0 \geq 0$ si $|v/c| \leq 1$ et $\delta W = \mathcal{O}(v^2/c^2)$ non signé.

Démonstration. La démonstration est donnée dans [BD04]. Cependant, on donne tout de même les détails de celle-ci car on adopte ici une démarche légèrement différente. Pour montrer le résultat, il convient de réécrire la production d'entropie W de la façon suivante :

$$\begin{aligned} W = & \underbrace{-4\pi \int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 \left[\frac{\gamma (1 - \mu \frac{v}{c})}{T} + \frac{k}{h\nu} \log \left(\frac{n}{n+1} \right) \right] S(\mu, \nu) \frac{d\mu}{2} d\nu}_{=W_0} \\ & + \underbrace{(\gamma - 1) \frac{4\pi}{T} \int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 \left(1 - \mu \frac{v}{c} \right) S(\mu, \nu) \frac{d\mu}{2} d\nu}_{=\delta W}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

avec $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Comme $(\gamma - 1) = \mathcal{O}(v^2/c^2)$, il vient immédiatement que $\delta W = \mathcal{O}(v^2/c^2)$. On montre à présent la positivité de W_0 . Pour cela on introduit la fonction suivante :

$$f : x > 0 \mapsto \frac{k}{h} \log \left(\frac{\frac{c^2}{2h} \frac{x}{\nu^3}}{1 + \frac{c^2}{2h} \frac{x}{\nu^3}} \right). \quad (3.62)$$

Ainsi définie, f est strictement croissante et on a les égalités :

$$f(B(\nu, T)) = -\frac{\nu}{T}, \quad f(I) = \frac{k}{h} \log \left(\frac{n}{n+1} \right), \quad (3.63)$$

si bien que W_0 se réécrit en explicitant l'expression de S :

$$\begin{aligned} W_0 = & -4\pi \int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 \frac{1}{\nu} \sigma_a(\nu_0) \gamma \left(1 - \mu \frac{v}{c} \right) \left[f(I(\mu, \nu)) - f \left(B \left(\nu, \frac{T}{\gamma (1 - \mu \frac{v}{c})} \right) \right) \right] \\ & \times \left[B \left(\nu, \frac{T}{\gamma (1 - \mu \frac{v}{c})} \right) - I(\mu, \nu) \right] \frac{d\mu}{2} d\nu. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Par croissance stricte de f , le produit des deux facteurs entre crochets est toujours négatif ou nul. Comme de plus le facteur $\frac{1}{\nu} \sigma_a(\nu_0) \gamma (1 - \mu \frac{v}{c})$ est positif ou nul pour tout $v \in]-c, c[$, il vient que W_0 est toujours positif ou nul, ce qui termine la démonstration. \square

Le fait que l'on couple les équations d'Euler classiques à l'équation de transport des photons via les termes sources relativistes fait apparaître un terme correctif δW que l'on ne peut pas signer dans l'expression de la production totale d'entropie. Comme [BD04] le fait remarquer, ce terme supplémentaire est problématique puisqu'il peut potentiellement faire varier le signe de la production totale d'entropie ; cependant, il est négligeable dans la limite non relativiste ($v/c \ll 1$) car dominé par v^2/c^2 . Pour compléter l'analyse de [BD04], on propose ici une légère correction pour l'expression du terme source S qui assure la positivité de la production d'entropie. On définit alors un nouveau terme source S^* par l'expression suivante :

$$S^*(\mu, \nu) = \left(1 - \mu \frac{v}{c}\right) \sigma_a(\nu_0) \left[B\left(\nu, \frac{T}{1 - \mu \frac{v}{c}}\right) - I(\mu, \nu) \right]. \quad (3.65)$$

Pour passer de l'expression exacte du terme source S à l'expression modifiée S^* , on a uniquement posé $\gamma = 1$ dans l'expression de S , ce qui reste correct à $\mathcal{O}(v^2/c^2)$ près. On a donc :

$$S(\mu, \nu) = S^*(\mu, \nu) + \mathcal{O}(v^2/c^2). \quad (3.66)$$

Cette modification du terme source n'affecte en rien les lois de conservation pour l'énergie (3.52) et l'impulsion totale (3.53). En revanche, les solutions classiques de (3.49) avec le terme source modifié vérifient la loi de bilan d'entropie totale suivante :

$$\partial_t(\rho s + S_r) + \partial_x(\rho s v + Q_r) = W^*, \quad (3.67)$$

où $W^* = W^*(x, t)$ est la production d'entropie totale qui s'écrit alors :

$$W^* = -4\pi \int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 \left[\frac{1 - \mu \frac{v}{c}}{T} + \frac{k}{h\nu} \log\left(\frac{n}{n+1}\right) \right] S^*(\mu, \nu) \frac{d\mu}{2} d\nu. \quad (3.68)$$

On a alors le résultat suivant.

Propriété 3.2. Lorsque l'on modifie le terme source S du système d'équations (3.49) en S^* dont l'expression est donnée par (3.65), la production totale d'entropie W^* est toujours positive lorsque $|v/c| \leq 1$.

Démonstration. On introduit la fonction suivante :

$$f : x > 0 \mapsto \frac{k}{h} \log\left(\frac{\frac{c^2}{2h} \frac{x}{\nu^3}}{1 + \frac{c^2}{2h} \frac{x}{\nu^3}}\right). \quad (3.69)$$

Cette fonction est strictement croissante et on a les égalités suivantes :

$$f(B(\nu, T)) = -\frac{\nu}{T}, \quad f(I) = \frac{k}{h} \log\left(\frac{n}{n+1}\right). \quad (3.70)$$

La production totale d'entropie se réécrit alors en explicitant l'expression de S^* :

$$\begin{aligned} W^* = -4\pi \int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 \frac{\sigma_a(\nu_0)}{\nu} \left(1 - \mu \frac{v}{c}\right) & \left[f(I(\mu, \nu)) - f\left(B\left(\nu, \frac{T}{1 - \mu \frac{v}{c}}\right)\right) \right] \\ & \times \left[B\left(\nu, \frac{T}{1 - \mu \frac{v}{c}}\right) - I(\mu, \nu) \right] \frac{d\mu}{2} d\nu. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Par croissance stricte de f , le produit des deux facteurs entre crochets est toujours négatif. De plus, la quantité $\frac{1}{v}\sigma_a(\nu_0)(1 - \mu\frac{v}{c})$ est toujours positive pour $v \in]-c, c[$, si bien que W^* est toujours positif, ce qui termine la démonstration. \square

Pour construire un modèle de transport classique obéissant à une loi d'entropie, il suffit de dégrader les termes sources relativistes. Néanmoins, l'approximation faite reste exacte à $\mathcal{O}(v^2/c^2)$ près, ce qui est acceptable pour des fluides non relativistes.

3.2.3 Modèle de transport gris

Dans cette section, on effectue la même étude que dans le cas spectral mais pour un modèle de transport gris, *i.e* moyenné en fréquence. De la même manière que précédemment, l'accent est mis sur l'analyse de la structure entropique du modèle selon les expressions des termes sources utilisées. Dans la littérature, cette analyse est effectuée pour le modèle de transport spectral (3.49) (voir section précédente et notamment [BD04]), mais n'est cependant pas effectuée pour un modèle gris. Le modèle étudié, appelé *modèle de transport gris*, est construit de la même manière que le modèle de transport spectral (3.49), c'est-à-dire en couplant les équations d'Euler classiques avec l'équation de transfert intégrée en fréquences :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + p) = -g, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho e v + p v) = -c G^0, \\ \frac{1}{c} \partial_t I + \mu \partial_x I = S. \end{cases} \quad (3.72)$$

Ici, $I = I(x, t, \mu)$ désigne l'intensité radiative intégrée en fréquences. L'expression du terme source $S = S(x, t, \mu)$ est obtenue par intégration en fréquences de l'expression (3.50) qui est issue des transformations de Lorentz exactes. Dans l'hypothèse grise, on obtient alors les expressions suivantes (en l'absence de scattering) :

$$S(\mu) = \gamma \left(1 - \mu \frac{v}{c}\right) \sigma_a \left[\frac{ac}{4\pi} \frac{T^4}{\gamma^4 \left(1 - \mu \frac{v}{c}\right)^4} - I(\mu) \right], \quad (3.73)$$

$$G^0 = \frac{4\pi}{c} \int_{-1}^1 S(\mu) \frac{d\mu}{2}, \quad g = \frac{4\pi}{c} \int_{-1}^1 S(\mu) \mu \frac{d\mu}{2}. \quad (3.74)$$

Identiquement au cas spectral étudié précédemment, ce modèle conserve l'énergie et l'impulsion totales. En effet, la somme du moment angulaire d'ordre 0 de l'équation de transport des photons et de l'équation d'Euler sur l'énergie donne la loi de conservation pour l'énergie totale :

$$\partial_t(\rho e + E) + \partial_x(\rho e v + p v + F) = 0. \quad (3.75)$$

De même, la somme du moment angulaire d'ordre 1 de l'équation de transport des photons et de l'équation d'Euler sur l'impulsion donne la loi de conservation pour l'impulsion totale :

$$\partial_t(\rho v + F/c^2) + \partial_x(\rho v^2 + p + P) = 0. \quad (3.76)$$

On étudie à présent la structure entropique du système d'équations (3.72). On remarque tout d'abord que les expressions de l'entropie radiative et du flux d'entropie radiative telles qu'elles sont écrites dans [BD04] ne sont applicables que dans le cas spectral, ce qui ne convient pas ici. On introduit alors des nouvelles définitions, adaptées au cas gris, pour l'entropie radiative et le flux d'entropie radiative.

Définition 3.5. On définit l'entropie radiative $S_r = S_r(x, t)$ et le flux d'entropie radiative $Q_r = Q_r(x, t)$ par les expressions suivantes :

$$S_r = \frac{4}{3}a \int_{-1}^1 \left(\frac{4\pi}{ac} I(\mu) \right)^{3/4} \frac{d\mu}{2}, \quad (3.77)$$

$$Q_r = \frac{4}{3}ac \int_{-1}^1 \left(\frac{4\pi}{ac} I(\mu) \right)^{3/4} \mu \frac{d\mu}{2}. \quad (3.78)$$

On vérifie sans peine que S_r ainsi définie est une fonction strictement concave de I .

Les solutions classiques de (3.72) vérifient alors la loi de bilan d'entropie radiative :

$$\partial_t S_r + \partial_x Q_r = 4\pi \int_{-1}^1 \left(\frac{4\pi}{ac} I(\mu) \right)^{-1/4} S(\mu) \frac{d\mu}{2}, \quad (3.79)$$

ainsi que la loi de bilan d'entropie thermodynamique qui s'écrit :

$$\partial_t(\rho s) + \partial_x(\rho s v) = -\frac{c}{T} \left(G^0 - \frac{v}{c} g \right) = -\frac{4\pi}{T} \int_{-1}^1 \left(1 - \mu \frac{v}{c} \right) S(\mu) \frac{d\mu}{2}. \quad (3.80)$$

En sommant ces deux bilans d'entropie, on obtient la loi de bilan d'entropie totale satisfaite par toute solution classique de (3.72) :

$$\partial_t(\rho s + S_r) + \partial_x(\rho s v + Q_r) = W, \quad (3.81)$$

avec $W = W(x, t)$ la production totale d'entropie du système (3.72) et qui vaut :

$$W = 4\pi \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{4\pi}{ac} I(\mu) \right)^{-1/4} - \frac{1 - \mu \frac{v}{c}}{T} \right] S(\mu) \frac{d\mu}{2}. \quad (3.82)$$

On a alors le résultat suivant.

Propriété 3.3. La production totale d'entropie du système d'équations (3.72) s'écrit comme la somme de deux termes :

$$W = W_0 + \delta W, \quad (3.83)$$

avec $W_0 \geq 0$ si $|v/c| \leq 1$ et $\delta W = \mathcal{O}(v^2/c^2)$ non signé.

Démonstration. Pour montrer le résultat, on procède de la même manière que dans le cas spectral. On réécrit W sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
W &= 4\pi \underbrace{\int_{-1}^1 \left[\left(\frac{4\pi}{ac} I(\mu) \right)^{-1/4} - \frac{\gamma (1 - \mu \frac{v}{c})}{T} \right] S(\mu) \frac{d\mu}{2}}_{=W_0} \\
&\quad + \underbrace{(\gamma - 1) \frac{4\pi}{T} \int_{-1}^1 \left(1 - \mu \frac{v}{c} \right) S(\mu) \frac{d\mu}{2}}_{=\delta W}.
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Comme $\gamma - 1 = \mathcal{O}(v^2/c^2)$, il vient immédiatement $\delta W = \mathcal{O}(v^2/c^2)$. Il reste à montrer la positivité de W_0 . Pour cela, on introduit la fonction suivante :

$$f : x > 0 \mapsto \left(\frac{4\pi}{ac} x \right)^{-1/4}, \tag{3.85}$$

qui est strictement décroissante. En explicitant l'expression de S dans l'expression de W_0 , on a :

$$\begin{aligned}
W_0 &= 4\pi \int_{-1}^1 \sigma_a \gamma \left(1 - \mu \frac{v}{c} \right) \left[f(I(\mu)) - f \left(\frac{ac}{4\pi \gamma^4 (1 - \mu \frac{v}{c})^4} \right) \right] \\
&\quad \times \left[\frac{ac}{4\pi \gamma^4 (1 - \mu \frac{v}{c})} - I(\mu) \right] \frac{d\mu}{2}.
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Par décroissance stricte de f , le produit des deux facteurs entre crochets est toujours positif. Comme la quantité $\sigma_a \gamma (1 - \mu \frac{v}{c})$ est positive pour tout $v \in]-c, c[$, on obtient bien que W_0 est toujours positif, ce qui termine la démonstration. \square

On remarque que la structure entropique du modèle gris (3.72) est identique à celle du modèle spectral (3.49) (sans modification du terme source). Le couplage des équations d'Euler classiques avec l'équation de transport des photons via les termes sources relativistes fait apparaître un terme correctif δW non signé dans l'expression de la production totale d'entropie. De même que dans le cas spectral, ce terme supplémentaire est en $\mathcal{O}(v^2/c^2)$, ce qui est négligeable dans la limite non relativiste, mais peut potentiellement faire varier le signe de la production totale d'entropie lorsqu'on se place dans d'autres régimes. On propose à présent une correction du terme source S (3.73) de manière à former une modèle entropique quel que soit le régime considéré :

$$S^*(\mu) = \left(1 - \mu \frac{v}{c} \right) \sigma_a \left[\frac{ac}{4\pi (1 - \mu \frac{v}{c})^4} - I(\mu) \right] = S(\mu) + \mathcal{O} \left(\frac{v^2}{c^2} \right). \tag{3.87}$$

On constate que le terme source corrigé S^* reste exact à $\mathcal{O}(v^2/c^2)$ par rapport au terme source S . On note de plus que l'expression corrigée S^* s'obtient en supposant un effet Doppler classique, c'est-à-dire donné par la formule $\nu_0 = \nu (1 - \mu \frac{v}{c})$.

Propriété 3.4. Avec le terme source S donné par (3.87), les solutions classiques du système d'équations (3.49) vérifient les propriétés suivantes :

– conservation de l'énergie totale :

$$\partial_t(\rho e + E) + \partial_x(\rho e v + p v + F) = 0, \quad (3.88)$$

– conservation de la quantité de mouvement totale :

$$\partial_t(\rho v + F/c^2) + \partial_x(\rho v^2 + p + P) = 0, \quad (3.89)$$

– dissipation locale de l'entropie totale :

$$\partial_t(-\rho s - S_r) + \partial_x(-\rho s v - Q_r) = W, \quad (3.90)$$

avec :

$$W = -4\pi \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{4\pi}{ac} I \right)^{-1/4} - \frac{1 - \mu \frac{v}{c}}{T} \right] S^*(\mu) \frac{d\mu}{2}, \quad (3.91)$$

qui est négatif lorsque $|v/c| \leq 1$.

Démonstration. Pour toute solution classique du système d'équations (3.72) avec les termes sources donnés par (3.87), les lois de conservation pour l'énergie et l'impulsion totales se montrent trivialement ; c'est une conséquence directe de la construction du modèle, et en particulier du choix des termes sources. Il reste à démontrer la dissipation de l'entropie totale. La loi de bilan pour l'entropie du fluide s'écrit :

$$\partial_t(-\rho s) + \partial_x(-\rho s v) = 4\pi \int_{-1}^1 \frac{1 - \mu \frac{v}{c}}{T} S^*(\mu) \frac{d\mu}{2}. \quad (3.92)$$

La loi de bilan pour l'entropie radiative s'écrit :

$$\partial_t(-S_r) + \partial_x(-Q_r) = -4\pi \int_{-1}^1 \left(\frac{4\pi}{ac} I \right)^{-1/4} S^*(\mu) \frac{d\mu}{2}. \quad (3.93)$$

La loi de bilan pour l'entropie totale s'écrit alors :

$$\partial_t(-\rho s - S_r) + \partial_x(-\rho s v - Q_r) = -4\pi \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{4\pi}{ac} I \right)^{-1/4} - \frac{1 - \mu \frac{v}{c}}{T} \right] S^*(\mu) \frac{d\mu}{2}. \quad (3.94)$$

La production totale d'entropie s'écrit alors :

$$4\pi \int_{-1}^1 \left[f \left(\frac{ac}{4\pi} \frac{T^4}{(1 - \mu \frac{v}{c})^4} \right) - f(I) \right] \sigma_a \left(1 - \mu \frac{v}{c} \right) \left[\frac{ac}{4\pi} \frac{T^4}{(1 - \mu \frac{v}{c})^4} - I \right] \frac{d\mu}{2}, \quad (3.95)$$

où on a posé :

$$f(x) = \left(\frac{4\pi}{ac} x \right)^{-1/4}. \quad (3.96)$$

Par décroissance de la fonction f , l'intégrale ci-dessus est bien toujours négative ce qui termine la démonstration. \square

De même que dans le cas spectral, pour construire un modèle de transport classique obéissant à une loi d'entropie, il suffit de dégrader les termes sources relativistes. Néanmoins, l'approximation faite reste exacte à $\mathcal{O}(v^2/c^2)$ près, ce qui est acceptable pour des fluides non relativistes.

3.2.4 Modèles VEF gris

Dans cette partie, on étudie une catégorie de modèles construits par couplage des équations d'Euler classiques aux deux premiers moments intégrés en fréquence de l'équation de transfert. On parle ici de catégorie de modèles car ceux-ci possèdent la même structure globale mais diffèrent de par les expressions des termes sources ou de la condition de fermeture utilisées. Ces modèles sont étudiés par de nombreux auteurs, on peut citer notamment [SS10], [LMH99], [BD04]. Tous ces modèles s'écrivent de la manière suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + p) = -g, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho e v + p v) = -cG^0, \\ \partial_t E + \partial_x F = cG^0, \\ \frac{1}{c^2} \partial_t F + \partial_x P = g. \end{cases} \quad (3.97)$$

Dans (3.97), v désigne la vitesse de la matière, ρ , p , ε et $e = \varepsilon + v^2/2$ sont respectivement la masse volumique, la pression, l'énergie interne spécifique et l'énergie totale (interne + cinétique) spécifique de la matière, E , F et P sont respectivement la densité d'énergie radiative, le flux d'énergie radiative et la pression radiative, cG^0 et g sont respectivement les quantités d'énergie et d'impulsion transmises de la matière au rayonnement par unité de volume et de temps. Toutes ces quantités sont des fonctions qui dépendent de l'espace et du temps. Pour fermer le système homogène, on ajoute l'équation d'état du fluide de la forme $EOS(\rho, \varepsilon, p) = 0$ et une condition de fermeture de type VEF (variable Eddington factor) :

$$P = D(E, F)E, \quad (3.98)$$

où D est le facteur d'Eddington donné par une formule analytique fonction de E et F . Plusieurs choix sont possibles pour l'expression du facteur d'Eddington. [BD04] utilise l'approximation M_1 :

$$D(E, F) = \frac{1 - \chi}{2} + \frac{3\chi - 1}{2} f^2, \quad \chi = \frac{3 + 4f^2}{5 + 2\sqrt{4 - 3f^2}}, \quad f = \frac{F}{E}. \quad (3.99)$$

Une fermeture aussi utilisée fréquemment, voir par exemple [LMH99], est la fermeture P_1 :

$$D(E, F) = \frac{1}{3}. \quad (3.100)$$

D'autres choix sont cependant possibles (voir [Lev84], [LP81], [Bru02]). Pour les expressions des termes sources G^0 et g , il y a aussi plusieurs choix possibles. Tout d'abord,

rappelons que les expressions exactes des termes sources, obtenues par transformation de Lorentz, sont données par (3.34) et (3.35) :

$$G^0 = \gamma\sigma_a[aT^4 - E] + \gamma\sigma_a\frac{v}{c}\frac{F}{c}, \quad (3.101)$$

$$g = -\gamma\sigma_a\frac{F}{c} + \gamma\sigma_a\frac{v}{c}[aT^4 + P]. \quad (3.102)$$

On obtient aussi ces expressions en prenant les deux premiers moments angulaires de (3.73). Dans (3.101) et (3.102), T désigne la température de la matière et σ_a l'opacité d'absorption de la matière moyennée sur tout le spectre de fréquence. Ces quantités sont des fonctions qui dépendent de l'espace et du temps. De plus, T est donnée par une formule analytique fonction de ρ et de ε , et σ_a par une formule analytique, ou des tables de valeurs, qui dépend de ρ et T . Ce choix de termes sources est rarement utilisé dans la littérature (voir [BD04]), et est peu judicieux pour deux raisons : (1) ils sont obtenus en prenant les moments angulaires de (3.73) qui est une expression qui engendre des défauts d'entropie pour le modèle de transport classique gris (voir section précédente), (2) comme on utilise les équations d'Euler classiques, qui sont déjà une approximation en $\mathcal{O}(v^2/c^2)$ des équations d'Euler relativistes, on peut juger que ces expressions sont inutilement précises. Un autre choix possible est donc d'utiliser les expressions tronquées au premier ordre en v/c :

$$G^0 = \sigma_a[aT^4 - E] + \sigma_a\frac{v}{c}\frac{F}{c}, \quad (3.103)$$

$$g = -\sigma_a\frac{F}{c} + \sigma_a\frac{v}{c}[aT^4 + P]. \quad (3.104)$$

Ces expressions sont aussi obtenues en prenant les deux premiers moments angulaires de (3.87). Malgré le fait que ces expressions des termes sources corrigent les deux pathologies identifiées précédemment, celles-ci ne sont guère utilisées dans la littérature. On utilise préférentiellement les expressions suivantes :

$$G^0 = \sigma_a[aT^4 - E] + \sigma_a\frac{v}{c}\frac{F}{c} - \sigma_a\frac{v^2}{c^2}(E + P), \quad (3.105)$$

$$g = -\sigma_a\frac{F}{c} + \sigma_a\frac{v}{c}[aT^4 + P], \quad (3.106)$$

qui sont les troncatures au premier ordre en v/c des expressions (3.101) et (3.102) dans lesquelles on a gardé certains termes, mais pas tous, d'ordre $\mathcal{O}(v^2/c^2)$. Ces termes sources sont utilisés notamment dans [LMH99], [SS10], [LM01]. Les raisons invoquées par ces auteurs au sujet des termes d'ordre 2 en v/c dans les termes sources sont les suivantes : (1) l'état d'équilibre est indépendant des opacités, (2) l'état d'équilibre ne dépend que de E et F . Ces deux propriétés sont satisfaites en utilisant les termes sources (3.105) et (3.106) (la démonstration est effectuée dans [LMH99]). Quelle que soit la condition de fermeture ou le choix des termes sources, le modèle (3.97) possède les propriétés suivantes.

Propriété 3.5. Les solutions classiques du système d'équations (3.97) vérifient les propriétés suivantes :

– conservation de l'énergie totale :

$$\partial_t(\rho e + E) + \partial_x(\rho e v + p v + F) = 0, \quad (3.107)$$

– conservation de la quantité de mouvement totale :

$$\partial_t(\rho v + F/c^2) + \partial_x(\rho v^2 + p + P) = 0. \quad (3.108)$$

Propriété 3.6. Les solutions classiques du système d'équations (3.97) avec fermeture P_1 (3.100) ne dissipent pas l'entropie totale S_t quelles que soient les expressions des termes sources (3.101)- (3.106), où :

$$S_t = \rho s + \frac{2}{3} a T_1^3 + \frac{2}{3} a T_2^3, \quad (3.109)$$

où T_1 et T_2 sont les températures radiatives définies par :

$$E + \frac{\sqrt{3}}{c} F = a T_1^4, \quad E - \frac{\sqrt{3}}{c} F = a T_2^4. \quad (3.110)$$

On voit ici qu'en partant du modèle entropique (3.72), l'approximation P_1 « casse » le caractère entropique du modèle. Intuitivement, on pourrait penser que cette perte du caractère entropique provient du fait qu'on a effectué l'approximation P_1 pour l'intensité radiative I mais pas pour la fonction d'émission $a T^4 / (1 - \mu v / c)^4$. Lorsqu'on fait l'approximation P_1 pour I comme pour $a T^4 / (1 - \mu v / c)^4$, on obtient les termes sources suivants :

$$G^0 = \sigma_a \left(\frac{a T^4}{2} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{v}{c}\right)^3} + \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{v}{c}\right)^3} \right] - E \right) + \sigma_a \frac{v}{c} \frac{F}{c}, \quad (3.111)$$

$$g = -\sigma_a \frac{F}{c} + \sigma_a \frac{v}{c} \left(\frac{a T^4}{2\sqrt{3}} \left[\frac{1}{\frac{v}{c} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{v}{c}\right)^3} - \frac{1}{\frac{v}{c} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{v}{c}\right)^3} \right] + E/3 \right). \quad (3.112)$$

Ces expressions sont exactes à $\mathcal{O}(v^2/c^2)$ près par rapport aux termes sources donnés par transformation de Lorentz (3.101) et (3.102).

Propriété 3.7. Avec les termes sources G^0 et g donné par (3.111) et (3.112), les solutions classiques du système d'équations (3.97) avec fermeture P_1 (3.100) vérifient les propriétés suivantes :

– conservation de l'énergie totale :

$$\partial_t(\rho e + E) + \partial_x(\rho e v + p v + F) = 0, \quad (3.113)$$

– conservation de la quantité de mouvement totale :

$$\partial_t(\rho v + F/c^2) + \partial_x(\rho v^2 + p + P) = 0. \quad (3.114)$$

– dissipation locale de l'entropie totale :

$$\partial_t(-\rho s - S_r) + \partial_x(-\rho s v - Q_r) \leq 0, \quad (3.115)$$

avec

$$S_r = \frac{2}{3}aT_1^3 + \frac{2}{3}aT_2^3, \quad (3.116)$$

$$Q_r = \frac{2}{3}a\frac{c}{\sqrt{3}}T_1^3 - \frac{2}{3}a\frac{c}{\sqrt{3}}T_2^3. \quad (3.117)$$

Démonstration. Si on considère une solution classique de (3.97) avec les termes sources donnés par (3.111) et (3.112), celle-ci vérifie la loi de bilan pour l'entropie du fluide :

$$\begin{aligned} \partial_t(-\rho s) + \partial_x(-\rho s v) &= \frac{1}{2T} \left(1 - \frac{v}{c\sqrt{3}}\right)^2 \sigma_a c \left[\frac{T^4}{\left(1 - \frac{v}{c\sqrt{3}}\right)^4} - T_1^4 \right] \\ &+ \frac{1}{2T} \left(1 + \frac{v}{c\sqrt{3}}\right)^2 \sigma_a c \left[\frac{T^4}{\left(1 + \frac{v}{c\sqrt{3}}\right)^4} - T_2^4 \right]. \end{aligned} \quad (3.118)$$

Pour le rayonnement, on a les deux équations suivantes, obtenues en combinant les deux équations sur E et F :

$$\frac{1}{c}\partial_t I_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\partial_x I_1 = cG_0 + c\sqrt{3}g, \quad I_1 = E + \frac{\sqrt{3}}{c}F, \quad (3.119)$$

$$\frac{1}{c}\partial_t I_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\partial_x I_2 = cG_0 - c\sqrt{3}g, \quad I_2 = E - \frac{\sqrt{3}}{c}F. \quad (3.120)$$

Après calculs, on a :

$$cG_0 + c\sqrt{3}g = \left(1 - \frac{v}{c\sqrt{3}}\right) \sigma_a a c \left[\frac{T^4}{\left(1 - \frac{v}{c\sqrt{3}}\right)^4} - T_1^4 \right], \quad (3.121)$$

$$cG_0 - c\sqrt{3}g = \left(1 + \frac{v}{c\sqrt{3}}\right) \sigma_a a c \left[\frac{T^4}{\left(1 + \frac{v}{c\sqrt{3}}\right)^4} - T_2^4 \right], \quad (3.122)$$

En divisant l'équation sur I_1 par $2T_1$ et l'équation sur I_2 par $2T_2$, on obtient les deux équations suivantes :

$$\partial_t \left(\frac{2}{3} a T_1^3 \right) + \partial_x \left(\frac{c}{\sqrt{3}} \frac{2}{3} a T_1^3 \right) = \frac{1}{2T_1} \left(1 - \frac{v}{c\sqrt{3}} \right) \sigma_a a c \left[\frac{T^4}{\left(1 - \frac{v}{c\sqrt{3}} \right)^4} - T_1^4 \right], \quad (3.123)$$

$$\partial_t \left(\frac{2}{3} a T_2^3 \right) - \partial_x \left(\frac{c}{\sqrt{3}} \frac{2}{3} a T_2^3 \right) = \frac{1}{2T_2} \left(1 + \frac{v}{c\sqrt{3}} \right) \sigma_a a c \left[\frac{T^4}{\left(1 + \frac{v}{c\sqrt{3}} \right)^4} - T_2^4 \right], \quad (3.124)$$

La loi de bilan pour l'entropie totale s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & \partial_t \left(-\rho s - \frac{2}{3} a T_1^3 - \frac{2}{3} a T_2^3 \right) + \partial_x \left(-\rho s v - \frac{c}{\sqrt{3}} \frac{2}{3} a T_1^3 + \frac{c}{\sqrt{3}} \frac{2}{3} a T_2^3 \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{\left(1 - \frac{v}{c\sqrt{3}} \right)}{T} \right) \left(1 - \frac{v}{c\sqrt{3}} \right) \sigma_a a c \left[\frac{T^4}{\left(1 - \frac{v}{c\sqrt{3}} \right)^4} - T_1^4 \right] \\ & \quad - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{\left(1 + \frac{v}{c\sqrt{3}} \right)}{T} \right) \left(1 + \frac{v}{c\sqrt{3}} \right) \sigma_a a c \left[\frac{T^4}{\left(1 + \frac{v}{c\sqrt{3}} \right)^4} - T_2^4 \right]. \end{aligned} \quad (3.125)$$

On constate bien que le terme source dans l'équation ci-dessus est négatif. \square

3.2.5 Modèle P_N gris

Dans cette partie, on étudie un modèle P_N classique gris construit par extension du modèle P_1 entropique étudié dans la section précédente. Le modèle est construit en couplant les équations d'Euler classiques avec un système d'équations obtenu en projetant l'équation de transfert sur une base tronquée d'harmoniques sphériques. Le modèle s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + p) = -\frac{S_1}{c\sqrt{3}}, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho e v + p v) = -S_0, \\ \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{A} \partial_x \mathbf{u} = \mathbf{s}, \end{cases} \quad (3.126)$$

Dans (3.126), v désigne la vitesse de la matière, ρ , p , ε , $e = \varepsilon + v^2/2$ sont respectivement la masse volumique, la pression, l'énergie interne spécifique et l'énergie totale (interne + cinétique) spécifique de la matière, $\mathbf{u} = (I_0, \dots, I_N)^t$ et $\mathbf{s} = (S_0, \dots, S_N)^t$ désignent les vecteurs des projections sur la base orthonormée des polynômes de Legendre de l'intensité radiative et du terme source de l'équation de transfert (intégrés en fréquence) :

$$I_n = 4\pi \int_{-1}^1 I(\mu) \overline{P}_n(\mu) \frac{d\mu}{2}, \quad S_n = 4\pi \int_{-1}^1 S(\mu) \overline{P}_n(\mu) \frac{d\mu}{2}, \quad (3.127)$$

où S est donné par la formule (3.87), et \bar{P}_n désigne le polynôme de Legendre normé d'ordre n . Toutes ces quantités sont des fonctions qui dépendent de l'espace et du temps. En notation vectorielle, le vecteur \mathbf{s} s'exprime :

$$\mathbf{s} = (S_0, \dots, S_N)^t = \sigma_a(\mathbf{b} - \mathbf{u}) - \sigma_a \frac{v}{c} \mathbf{A}(\mathbf{b} - \mathbf{u}). \quad (3.128)$$

On néglige le phénomène de scattering. Dans (3.128), σ_a désigne l'opacité d'absorption moyennée sur tout le spectre de fréquence et $\mathbf{b} = (B_0, \dots, B_N)^t$ représente le vecteur des projections de la fonction $\mu \mapsto \frac{ac}{4\pi} \frac{T^4}{(1 - \mu \frac{v}{c})^4}$ sur la base orthonormée des polynômes de Legendre :

$$B_n = 4\pi \int_{-1}^1 \frac{ac}{4\pi} \frac{T^4}{(1 - \mu \frac{v}{c})^4} \bar{P}_n(\mu) \frac{d\mu}{2}. \quad (3.129)$$

On peut dériver les expressions analytiques des B_n pour $n \leq 4$. Cependant on ne les utilise pas et on fait l'approximation suivante :

$$B_n = acT^4 \sum_{k=0}^N \omega_k \frac{\bar{P}_n(\lambda_k)}{(1 - \lambda_k \frac{v}{c})^4}, \quad (3.130)$$

où ω_k et λ_k désignent respectivement les poids et les points associés à la quadrature de Gauss-Legendre. De même qu'en P_1 , cette approximation provient du fait que l'on a effectué l'approximation P_N pour la fonction d'émission $aT^4/(1 - \mu v/c)^4$. Dans (3.130), T désigne la température de la matière qui est une fonction du temps et de l'espace. Enfin, la matrice \mathbf{A} est une matrice constante dont les coefficients sont donnés par :

$$A_{ij} = \frac{j+1}{\sqrt{(2j+1)(2j+3)}} \delta_{j,i-1} + \frac{i+1}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}} \delta_{j,i+1} = A_{ji}. \quad (3.131)$$

Pour fermer le système, on dispose d'une équation reliant T , ρ et ε , d'une formule analytique pour l'opacité σ_a qui dépend de ρ et T , et de l'équation d'état du fluide de la forme $EOS(\rho, \varepsilon, p) = 0$.

Remarque 3.7. On note que pour $N = 1$, on retrouve le modèle (3.97) avec fermeture P_1 et les termes sources donnés par (3.111)-(3.112).

Remarque 3.8. Lorsque le nombre d'harmoniques N tend vers l'infini, le vecteur \mathbf{s} représente de mieux en mieux le terme source donné par (3.87).

On étudie à présent les propriétés mathématiques satisfaites par ce modèle.

Propriété 3.8. Les solutions classiques du système d'équations (3.126) vérifient les propriétés suivantes :

– conservation de l'énergie totale :

$$\partial_t(\rho e + E) + \partial_x(\rho e v + p v + F) = 0, \quad E = \frac{1}{c} I_0, \quad F = \frac{1}{\sqrt{3}} I_1, \quad (3.132)$$

– conservation de la quantité de mouvement totale :

$$\partial_t(\rho v + F/c^2) + \partial_x(\rho v^2 + p + P) = 0, \quad (3.133)$$

– dissipation locale de l'entropie totale :

$$\partial_t(-\rho s - S_r) + \partial_x(-\rho s v - Q_r) = W, \quad (3.134)$$

avec :

$$S_r = \sum_{n=0}^N \omega_n \frac{4}{3} a T_n^3, \quad Q_r = \sum_{n=0}^N \omega_n \lambda_n \frac{4}{3} a c T_n^3, \quad (3.135)$$

$$W = -\sigma_a a c \sum_{n=0}^N \omega_n \left[\frac{1}{T_n} - \frac{1 - \lambda_n \frac{v}{c}}{T} \right] \left(1 - \lambda_n \frac{v}{c} \right) \left[\frac{T^4}{\left(1 - \lambda_n \frac{v}{c} \right)^4} - T_n^4 \right], \quad (3.136)$$

qui est négatif lorsque $|v/c| \leq 1$, et où les T_n sont définies par :

$$\omega_n a c T_n^4 = (\mathbf{R}^{-1} \mathbf{u})_n, \quad (3.137)$$

avec \mathbf{R} la matrice des vecteurs propres de \mathbf{A} .

Démonstration. On considère une solution classique du système (3.126). On pose :

$$\mathbf{u}^* = (I_0^*, \dots, I_N^*)^t = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}, \quad (3.138)$$

$$\mathbf{b}^* = (B_0^*, \dots, B_N^*)^t = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b}. \quad (3.139)$$

La loi de bilan pour l'entropie du fluide s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho s) + \partial_x(\rho s v) &= -\frac{1}{T} \left(S_0 - \frac{v}{c\sqrt{3}} S_1 \right) \\ &= -\frac{1}{T} \sigma_a \sum_{n=0}^N \left(1 - \lambda_n \frac{v}{c} \right) (B_n^* - I_n^*) \left(R_{0n} - \frac{v}{c\sqrt{3}} R_{1n} \right) \\ &= -\frac{1}{T} \sigma_a \sum_{n=0}^N \left(1 - \lambda_n \frac{v}{c} \right)^2 (B_n^* - I_n^*), \end{aligned} \quad (3.140)$$

où on a utilisé le fait que $R_{0n} = 1$ et $R_{1n} = \sqrt{3} \lambda_n$. En multipliant par \mathbf{R}^{-1} les projections de l'équation de transfert, on obtient le système suivant :

$$\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{u}^* + \mathbf{D} \partial_x \mathbf{u}^* = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s} = \sigma_a (\mathbf{b}^* - \mathbf{u}^*) - \sigma_a \frac{v}{c} \mathbf{D} (\mathbf{b}^* - \mathbf{u}^*). \quad (3.141)$$

Ou encore, pour tout n :

$$\frac{1}{c} \partial_t I_n^* + \lambda_n \partial_x I_n^* = \sigma_a \left(1 - \lambda_n \frac{v}{c} \right) (B_n^* - I_n^*). \quad (3.142)$$

En posant pour tout n :

$$I_n^* = \omega_n ac T_n^4, \quad (3.143)$$

avec ω_n les poids associés à la quadrature de Gauss-Legendre. En divisant la dernière équation par T_n , on obtient :

$$\partial_t \left(\omega_n \frac{4}{3} a T_n^3 \right) + \partial_x \left(\omega_n \frac{4}{3} ac \lambda_n T_n^3 \right) = \frac{1}{T_n} \sigma_a \left(1 - \lambda_n \frac{v}{c} \right) (B_n^* - I_n^*). \quad (3.144)$$

Enfin, en sommant toutes les lois de bilans entropique, on a :

$$\begin{aligned} \partial_t \left(-\rho s - \sum_{n=0}^N \omega_n \frac{4}{3} a T_n^3 \right) + \partial_x \left(-\rho s v - \sum_{n=0}^N \omega_n \frac{4}{3} ac \lambda_n T_n^3 \right) \\ = -\sigma_a \sum_{n=0}^N \left[\frac{1}{T_n} - \frac{1 - \lambda_n \frac{v}{c}}{T} \right] \left(1 - \lambda_n \frac{v}{c} \right) (B_n^* - ac \omega_n T_n^4), \end{aligned} \quad (3.145)$$

En remplaçant B_n^* par son expression :

$$B_n^* = ac \omega_n \frac{T^4}{(1 - \lambda_n \frac{v}{c})^4}. \quad (3.146)$$

la production d'entropie s'écrit :

$$-\sigma_a ac \sum_{n=0}^N \omega_n \left[\frac{1}{T_n} - \frac{1 - \lambda_n \frac{v}{c}}{T} \right] \left(1 - \lambda_n \frac{v}{c} \right) \left[\frac{T^4}{(1 - \lambda_n \frac{v}{c})^4} - T_n^4 \right], \quad (3.147)$$

ce qui est bien négatif. \square

On étudie à présent la limite diffusion du modèle (3.126). Pour cela, on commence par adimensionner le système d'équations étudié. On choisit l'adimensionnement proposé par [LMH99] et [BD04] :

$$x = \hat{x} \ell, \quad t = \hat{t} \frac{\ell}{v_\infty}, \quad v = \hat{v} v_\infty, \quad \rho = \hat{\rho} \rho_\infty, \quad \varepsilon = \hat{\varepsilon} v_\infty^2, \quad p = \hat{p} \rho_\infty v_\infty^2, \quad e = \hat{e} v_\infty^2, \quad (3.148)$$

$$T = \hat{T} T_\infty, \quad \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} ac T_\infty^4, \quad \mathbf{b} = \hat{\mathbf{b}} ac T_\infty^4, \quad \sigma_a = \frac{\hat{\sigma}_a}{\lambda_a}. \quad (3.149)$$

Le système d'équations adimensionné s'écrit alors :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + p) = -\mathcal{P} \frac{S_1}{\sqrt{3}}, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho e v + p v) = -\mathcal{P} \mathcal{C} S_0, \\ \frac{1}{\mathcal{C}} \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{A} \partial_x \mathbf{u} = \mathbf{s}, \end{cases} \quad (3.150)$$

avec

$$\mathbf{s} = (S_0, \dots, S_N)^t = \mathcal{L}_a \sigma_a (\mathbf{b} - \mathbf{u}) - \mathcal{L}_a \sigma_a \frac{v}{\mathcal{C}} \mathbf{A} (\mathbf{b} - \mathbf{u}), \quad (3.151)$$

$$\mathbf{b} = (B_0, \dots, B_N)^t = T^4 \sum_{k=0}^N \omega_k \frac{\bar{P}_n(\lambda_k)}{(1 - \lambda_k \frac{v}{c})^4}. \quad (3.152)$$

L'adimensionnement fait apparaître 3 nombres sans dimension :

$$\mathcal{P} = \frac{aT_\infty^4}{\rho_\infty v_\infty^2}, \quad \mathcal{C} = \frac{c}{v_\infty}, \quad \mathcal{L}_a = \frac{\ell}{\lambda_a}. \quad (3.153)$$

Pour étudier la limite diffusion du système d'équations (3.150), on se place dans le régime asymptotique suivant conformément à [BD04] et [LMH99] :

$$\mathcal{P} = 1, \quad \mathcal{C} = 1/\epsilon, \quad \mathcal{L}_a = 1/\epsilon, \quad \epsilon \ll 1. \quad (3.154)$$

Propriété 3.9. Dans la limite asymptotique (3.154), le système d'équations (3.150) tend vers le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x \left(\rho v^2 + p + \frac{T^4}{3} \right) = 0, \\ \partial_t(\rho e + T^4) + \partial_x \left(\rho e v + p v + \frac{4}{3} T^4 v \right) = \partial_x \left(\frac{1}{3\sigma_a} \partial_x T^4 \right). \end{cases} \quad (3.155)$$

Notons que ce résultat est purement formel et il en est de même pour la démonstration ci dessous. En toute rigueur, on montre que uniquement que, s'il y a convergence, alors la convergence s'effectue vers la bonne limite.

Démonstration. Pour chaque fonction f rencontrée, on effectue le développement suivant :

$$f = f^{(0)} + \epsilon f^{(1)} + \epsilon^2 f^{(2)} + \dots \quad (3.156)$$

Les termes en $\mathcal{O}(1)$ des équations d'Euler s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_t \rho^{(0)} + \partial_x(\rho^{(0)} v^{(0)}) = 0, \\ \partial_t(\rho^{(0)} v^{(0)}) + \partial_x(\rho^{(0)} (v^{(0)})^2 + p^{(0)}) = -\frac{S_1^{(0)}}{\sqrt{3}}, \\ \partial_t(\rho^{(0)} e^{(0)}) + \partial_x(\rho^{(0)} e^{(0)} v^{(0)} + p^{(0)} v^{(0)}) = -S_0^{(1)}. \end{cases} \quad (3.157)$$

Il reste à exprimer $S_0^{(1)}$ et $S_1^{(0)}$ en fonction des inconnues du système. On regarde pour cela les termes dominants du système P_N :

$$0 = \mathbf{s}^{(-1)} = \sigma_a (\mathbf{b}^{(0)} - \mathbf{u}^{(0)}), \quad (3.158)$$

$$\mathbf{A}\partial_x \mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{s}^{(0)} = \sigma_a(\mathbf{b}^{(1)} - \mathbf{u}^{(1)}) - \sigma_a v^{(0)} \mathbf{A}(\mathbf{b}^{(0)} - \mathbf{u}^{(0)}), \quad (3.159)$$

$$\partial_t \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{A}\partial_x \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{s}^{(1)} = \sigma_a(\mathbf{b}^{(2)} - \mathbf{u}^{(2)}) - \sigma_a v^{(0)} \mathbf{A}(\mathbf{b}^{(1)} - \mathbf{u}^{(1)}) - \sigma_a v^{(1)} \mathbf{A}(\mathbf{b}^{(0)} - \mathbf{u}^{(0)}). \quad (3.160)$$

Il vient alors les égalités :

$$\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{b}^{(0)}, \quad \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{b}^{(1)} - \frac{1}{\sigma_a} \mathbf{A}\partial_x \mathbf{b}^{(0)}. \quad (3.161)$$

Le système se réécrit alors :

$$\begin{cases} \partial_t \rho^{(0)} + \partial_x(\rho^{(0)} v^{(0)}) = 0, \\ \partial_t(\rho^{(0)} v^{(0)}) + \partial_x \left(\rho^{(0)} (v^{(0)})^2 + p^{(0)} + \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{A}\mathbf{b}^{(0)})_1 \right) = 0, \\ \partial_t(\rho^{(0)} e^{(0)} + B_0^{(0)}) + \partial_x(\rho^{(0)} e^{(0)} v^{(0)} + p^{(0)} v^{(0)} + (\mathbf{A}\mathbf{b}^{(1)})_0) \\ = \partial_x \left(\frac{1}{\sigma_a} \partial_x (\mathbf{A}^2 \mathbf{b}^{(0)})_0 \right). \end{cases} \quad (3.162)$$

Pour obtenir le résultat voulu, il suffit d'exprimer les quantités $B_0^{(0)}$, $(\mathbf{A}\mathbf{b}^{(0)})_1$, $(\mathbf{A}\mathbf{b}^{(1)})_0$ et $(\mathbf{A}^2 \mathbf{b}^{(0)})_0$. En développant le vecteur \mathbf{b} en puissance de ϵ , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= T^4 \sum_{k=0}^N \frac{\omega_k}{(1 - \lambda_k \frac{v}{\mathcal{C}})^4} (\bar{P}_0(\lambda_k), \dots, \bar{P}_N(\lambda_k))^t \\ &= \underbrace{(T^{(0)})^4 \sum_{k=0}^N \omega_k (\bar{P}_0(\lambda_k), \dots, \bar{P}_N(\lambda_k))^t}_{\mathbf{b}^{(0)}} \\ &\quad + \epsilon \underbrace{4(T^{(0)})^4 \sum_{k=0}^N \omega_k \left[\frac{T^{(1)}}{T^{(0)}} + \lambda_k v^{(0)} \right] (\bar{P}_0(\lambda_k), \dots, \bar{P}_N(\lambda_k))^t}_{\mathbf{b}^{(1)}} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (3.163)$$

Enfin, en utilisant les relations suivantes liant les poids et les points de la quadrature de Gauss-Legendre :

$$\forall n \in \{0, \dots, N\}, \quad \sum_{k=0}^N \omega_k \bar{P}_n(\lambda_k) = \delta_{n,0}, \quad \sum_{k=0}^N \omega_k \lambda_k \bar{P}_n(\lambda_k) = \frac{\delta_{n,1}}{\sqrt{3}}, \quad (3.164)$$

on tire :

$$\mathbf{b}^{(0)} = ((T^{(0)})^4, 0, \dots, 0)^t, \quad \mathbf{b}^{(1)} = \left(4T^{(1)}(T^{(0)})^3, \frac{4}{\sqrt{3}} v^{(0)} (T^{(0)})^4, 0, \dots, 0 \right)^t, \quad (3.165)$$

puis :

$$\begin{aligned} B_0^{(0)} &= (T^{(0)})^4, & \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{A}\mathbf{b}^{(0)})_1 &= \frac{(T^{(0)})^4}{3}, \\ (\mathbf{A}\mathbf{b}^{(1)})_0 &= \frac{4}{3}v^{(0)}(T^{(0)})^4, & (\mathbf{A}^2\mathbf{b}^{(0)})_0 &= \frac{(T^{(0)})^4}{3}, \end{aligned} \quad (3.166)$$

ce qui termine la démonstration. \square

3.3 Modèles relativistes

3.3.1 Équations d'Euler relativistes

Les équations modélisant la dynamique d'un fluide idéal relativiste sont des lois de bilans représentant la conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie totale (interne + cinétique) du fluide. Dans cette section, on présente ces équations, appelées *équations d'Euler relativistes*, sans aucune démonstration. La démarche pour dériver les équations d'Euler relativistes est la suivante : en partant des équations d'Euler classiques, on construit un système modifié respectant les propriétés suivantes : (1) covariance par transformation de Lorentz, (2) l'énergie totale du fluide et sa pression hydrostatique sont bien restituées dans le référentiel comobile, (3) les équations se réduisent aux équations d'Euler classiques dans la limite $v/c \ll 1$. On renvoie le lecteur à [MWM99], §40, pour les détails mathématiques. Les équations d'Euler relativistes sont étudiées en détails notamment dans [MM03] et [Wis07]. Elles s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_t(\gamma\rho_0) + \partial_x(\gamma\rho_0 v) = 0, \\ \partial_t[\gamma^2\rho_0(1 + h/c^2)v] + \partial_x[\gamma^2\rho_0(1 + h/c^2)v^2 + p] = 0, \\ \partial_t[\gamma^2\rho_0(c^2 + h) - p] + \partial_x[\gamma^2\rho_0(c^2 + h)v] = 0. \end{cases} \quad (3.167)$$

Dans (3.167), $\rho_0 = \rho_0(x, t)$ représente la masse volumique, $v = v(x, t)$ la vitesse, $p = p(x, t)$ la pression, $\varepsilon = \varepsilon(x, t)$ l'énergie interne spécifique, $h = h(x, t) = \varepsilon + p/\rho_0$ l'enthalpie spécifique du fluide et $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ le facteur de Lorentz. On précise en outre que les champs thermodynamiques ρ_0 , p , ε et h sont évalués dans le référentiel du fluide à la différence des équations d'Euler classiques (3.44). Ces 3 lois de conservation expriment respectivement la conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie totale du fluide. De la même manière que dans le cas non relativiste, on ajoute au système (3.167) une équation d'état de la forme :

$$p = p(\rho_0, \varepsilon). \quad (3.168)$$

Le système formé par (3.167) et (3.168) est alors bien fermé. Dans le cas d'un gaz parfait, l'équation d'état prend la forme suivante :

$$p = \Gamma\rho_0\varepsilon, \quad (3.169)$$

où Γ est une constante strictement positive. On sait de plus (voir notamment [Wis07]) qu'en l'absence de termes sources, les solutions classiques de (3.167) vérifie une loi de

conservation supplémentaire :

$$\partial_t(\gamma\rho_0 s) + \partial_x(\gamma\rho_0 s v) = 0, \quad (3.170)$$

où $s = s(x, t)$ désigne l'entropie spécifique du fluide mesurée dans le référentiel du fluide et est définie par la relation :

$$Tds = d\varepsilon + pd\left(\frac{1}{\rho_0}\right), \quad (3.171)$$

avec $T = T(x, t)$ la température du fluide mesurée dans référentiel du fluide. Lorsque l'équation d'état est bien choisie, $\gamma\rho_0 s$ est une fonction strictement concave par rapport à (ρ_0, v, ε) ce qui montre le caractère entropique du système d'équations (3.167).

3.3.2 Modèle de transport spectral

Dans cette partie, on étudie un modèle de transport relativiste spectral construit en couplant les équations d'Euler relativistes avec l'équation de transfert. Bien que non écrit explicitement, le modèle présenté ci-dessous apparaît dans l'article [BD04]. Le modèle s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t(\gamma\rho_0) + \partial_x(\gamma\rho_0 v) = 0, \\ \partial_t(\gamma^2\rho_0(1 + h/c^2)v) + \partial_x(\gamma^2\rho_0(1 + h/c^2)v^2 + p) = -g, \\ \partial_t(\gamma^2\rho_0(c^2 + h) - p) + \partial_x(\gamma^2\rho_0(c^2 + h)v) = -cG^0, \\ \frac{1}{c}\partial_t I + \mu\partial_x I = S. \end{cases} \quad (3.172)$$

Dans (3.172), v désigne la vitesse de la matière, $\rho_0, p, \varepsilon, h = \varepsilon + p/\rho_0$ sont respectivement la masse volumique, la pression, l'énergie interne spécifique et l'enthalpie spécifique de la matière dans le référentiel comobile, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ désigne le facteur de Lorentz, I l'intensité radiative, S le terme source de l'équation de transfert et cG^0, g respectivement les quantités d'énergie et d'impulsion transmises de la matière au rayonnement par unité de volume et de temps. Toutes ces quantités dépendent de l'espace et du temps ; I et S dépendent en plus de la direction et de la fréquence. Les expressions des termes sources sont celles obtenues par transformation de Lorentz et qui restituent exactement les effets Doppler et d'aberration dans le cadre relativiste :

$$S(\mu, \nu) = \gamma \left(1 - \mu \frac{v}{c}\right) \sigma_a(\nu_0) \left[B\left(\nu, \frac{T}{\gamma(1 - \mu \frac{v}{c})}\right) - I(\mu, \nu) \right], \quad (3.173)$$

$$G^0 = \frac{4\pi}{c} \int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 S(\mu, \nu) \frac{d\mu}{2} d\nu, \quad g = \frac{4\pi}{c} \int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 S(\mu, \nu) \mu \frac{d\mu}{2} d\nu. \quad (3.174)$$

On néglige pour le moment le phénomène de scattering. Dans (3.173), T et σ_a désignent la température et l'opacité d'absorption de la matière dans le référentiel comobile. Ces

quantités sont dépendantes de l'espace et du temps ; σ_a dépend en plus de la fréquence mesurée dans le référentiel comobile. La fonction B est la fonction de Planck :

$$B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} (e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)^{-1}. \quad (3.175)$$

Pour fermer le système, on dispose d'une équation reliant T , ρ_0 et ε , d'une formule analytique pour l'opacité σ_a qui dépend de ρ_0 , T et ν_0 , et de l'équation d'état du fluide de la forme $EOS(\rho_0, \varepsilon, p) = 0$. On étudie à présent la compatibilité entropique de ce modèle.

Propriété 3.10. Les solutions classiques du système d'équations (3.172) vérifient les propriétés suivantes :

– conservation de l'énergie totale :

$$\partial_t(\gamma^2 \rho_0 (c^2 + h) - p + E) + \partial_x(\gamma^2 \rho_0 (c^2 + h)v + F) = 0, \quad (3.176)$$

avec E et F la densité et le flux d'énergie radiative définis par

$$E = \frac{4\pi}{c} \int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 I(\mu, \nu) \frac{d\mu}{2} d\nu, \quad F = 4\pi \int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 I(\mu, \nu) \mu \frac{d\mu}{2} d\nu. \quad (3.177)$$

– conservation de la quantité de mouvement totale :

$$\partial_t(\gamma^2 \rho_0 (1 + h/c^2)v + F/c^2) + \partial_x(\gamma^2 \rho_0 (1 + h/c^2)v^2 + p + P) = 0, \quad (3.178)$$

avec P la pression radiative définie par :

$$P = \frac{4\pi}{c} \int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 I(\mu, \nu) \mu^2 \frac{d\mu}{2} d\nu. \quad (3.179)$$

– existence d'une entropie mathématique dissipative :

$$\partial_t(-\gamma \rho_0 s - S_r) + \partial_x(-\gamma \rho_0 s v - Q_r) = W, \quad (3.180)$$

avec :

$$S_r = -4\pi \frac{2k}{c^3} \int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 \nu^2 [n \log(n) - (n+1) \log(n+1)] \frac{d\mu}{2} d\nu, \quad (3.181)$$

$$Q_r = -4\pi \frac{2k}{c^2} \int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 \nu^2 [n \log(n) - (n+1) \log(n+1)] \mu \frac{d\mu}{2} d\nu, \quad (3.182)$$

$$W = 4\pi \int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 \left[\frac{\gamma (1 - \mu \frac{v}{c})}{T} + \frac{k}{h\nu} \log \left(\frac{n}{n+1} \right) \right] S(\mu, \nu) \frac{d\mu}{2} d\nu \leq 0, \quad (3.183)$$

avec $n = \frac{c^2}{2h} \frac{I}{\nu^3}$.

Démonstration. Les propriétés de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement totales découlent trivialement de la construction du modèle, et en particulier du choix des termes sources. On montre à présent la propriété de dissipation de l'entropie totale. La loi de bilan pour l'entropie totale s'écrit :

$$\begin{aligned} & \partial_t(-\gamma\rho_0 s - S_r) + \partial_x(-\gamma\rho_0 s v - Q_r) \\ &= 4\pi \int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 \left[\frac{\gamma(1 - \mu \frac{v}{c})}{T} + \frac{k}{h\nu} \log \left(\frac{n}{n+1} \right) \right] S(\mu, \nu) \frac{d\mu}{2} d\nu. \end{aligned} \quad (3.184)$$

Pour montrer la positivité de la production d'entropie, on introduit la fonction f définie par :

$$f : x > 0 \mapsto \frac{k}{h} \log \left(\frac{\frac{c^2}{2h} \frac{x}{\nu^3}}{\frac{c^2}{2h} \frac{x}{\nu^3} + 1} \right). \quad (3.185)$$

La production d'entropie se réécrit alors :

$$\begin{aligned} & 4\pi \int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 \frac{\sigma_a(\nu_0)}{\nu} \left[f(I(\mu, \nu)) - f \left(B \left(\nu, \frac{T}{\gamma(1 - \mu \frac{v}{c})} \right) \right) \right] \\ & \times \gamma \left(1 - \mu \frac{v}{c} \right) \left[B \left(\nu, \frac{T}{\gamma(1 - \mu \frac{v}{c})} \right) - I(\mu, \nu) \right] \frac{d\mu}{2} d\nu, \end{aligned} \quad (3.186)$$

Par croissance de la fonction f , l'intégrale ci-dessus est bien négative, ce qui termine la démonstration. \square

Contrairement au modèle de transport non relativiste (3.49), il n'est pas nécessaire de corriger les termes sources pour obtenir un modèle entropique lorsque l'on utilise les équations d'Euler relativistes. Le véritable intérêt de modèle relativiste par rapport au modèle classique est donc qu'il permet de restituer les effets comobiles (Doppler et aberration) de manière exacte tout en conservant une structure entropique.

3.3.3 Modèle de transport gris

Dans cette section, on étudie un modèle de transport relativiste gris construit en couplant les équations d'Euler relativistes avec l'équation de transfert intégrée en fréquence. Le modèle s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t(\gamma\rho_0) + \partial_x(\gamma\rho_0 v) = 0, \\ \partial_t(\gamma^2\rho_0(1 + h/c^2)v) + \partial_x(\gamma^2\rho_0(1 + h/c^2)v^2 + p) = -g, \\ \partial_t(\gamma^2\rho_0(c^2 + h) - p) + \partial_x(\gamma^2\rho_0(c^2 + h)v) = -cG^0, \\ \frac{1}{c}\partial_t I + \mu\partial_x I = S. \end{cases} \quad (3.187)$$

Dans (3.187), v désigne la vitesse de la matière, $\rho_0, p, \varepsilon, h = \varepsilon + p/\rho_0$ sont respectivement la masse volumique, la pression, l'énergie interne spécifique et l'enthalpie spécifique de la

matière dans le référentiel comobile, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ désigne le facteur de Lorentz, I l'intensité radiative, S le terme source de l'équation de transfert et cG^0 , g respectivement les quantités d'énergie et d'impulsion transmises de la matière au rayonnement par unité de volume et de temps. Toutes ces quantités dépendent de l'espace et du temps ; I et S dépendent en plus de la direction. Les expressions des termes sources sont celles obtenues par transformation de Lorentz qui restituent exactement les effets Doppler et d'aberration dans le cadre relativiste :

$$S(\mu) = \gamma \left(1 - \mu \frac{v}{c}\right) \sigma_a \left[\frac{ac}{4\pi} \left(\frac{T}{\gamma (1 - \mu \frac{v}{c})} \right)^4 - I(\mu) \right], \quad (3.188)$$

$$G^0 = \frac{4\pi}{c} \int_{-1}^1 S(\mu) \frac{d\mu}{2}, \quad g = \frac{4\pi}{c} \int_{-1}^1 S(\mu) \mu \frac{d\mu}{2}, \quad (3.189)$$

On néglige le phénomène de scattering. Dans (3.188), T désigne la température de la matière, σ_a l'opacité d'absorption moyennée sur tout le spectre de fréquence mesurée dans le référentiel comobile et $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ le facteur de Lorentz. Ces quantités sont des fonctions qui dépendent de l'espace et du temps. Pour fermer le système, on dispose d'une équation reliant T , ρ_0 et ε , d'une formule analytique pour l'opacité σ_a qui dépend de ρ_0 , T et ν_0 , et de l'équation d'état du fluide de la forme $EOS(\rho_0, \varepsilon, p) = 0$. On étudie à présent les propriétés mathématiques de ce modèle.

Propriété 3.11. Les solutions classiques du système d'équations (3.187) vérifient les propriétés suivantes :

- conservation de l'énergie totale :

$$\partial_t(\gamma^2 \rho_0 (c^2 + h) - p + E) + \partial_x(\gamma^2 \rho_0 (c^2 + h)v + F) = 0, \quad (3.190)$$

avec E et F la densité et le flux d'énergie radiative définis par

$$E = \frac{4\pi}{c} \int_{-1}^1 I(\mu, \cdot) \frac{d\mu}{2}, \quad F = 4\pi \int_{-1}^1 I(\mu) \mu \frac{d\mu}{2}. \quad (3.191)$$

- conservation de la quantité de mouvement totale :

$$\partial_t(\gamma^2 \rho_0 (1 + h/c^2)v + F/c^2) + \partial_x(\gamma^2 \rho_0 (1 + h/c^2)v^2 + p + P) = 0, \quad (3.192)$$

avec P la pression radiative définie par :

$$P = \frac{4\pi}{c} \int_{-1}^1 I(\mu) \mu^2 \frac{d\mu}{2}. \quad (3.193)$$

- existence d'une entropie mathématique dissipative :

$$\partial_t(-\gamma \rho_0 s - S_r) + \partial_x(-\gamma \rho_0 s v - Q_r) = W, \quad (3.194)$$

avec :

$$S_r = \frac{4}{3}a \int_{-1}^1 \left(\frac{4\pi}{ac} I \right)^{3/4} \frac{d\mu}{2}, \quad (3.195)$$

$$Q_r = \frac{4}{3}ac \int_{-1}^1 \left(\frac{4\pi}{ac} I \right)^{3/4} \mu \frac{d\mu}{2}, \quad (3.196)$$

$$W = 4\pi \int_{-1}^1 \left[\frac{\gamma \left(1 - \mu \frac{v}{c} \right)}{T} - \left(\frac{4\pi}{ac} I \right)^{-1/4} \right] S(\mu) \frac{d\mu}{2} \leq 0, \quad (3.197)$$

avec $n = \frac{c^2}{2h} \frac{I}{\nu^3}$.

Démonstration. Les propriétés de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement totales découlent trivialement de la construction du modèle, et en particulier du choix des termes sources. On montre à présent la propriété de dissipation de l'entropie totale. Toute solution classique du système (3.187) vérifie la loi de bilan pour l'entropie du fluide qui s'écrit :

$$\partial_t(\gamma \rho s) + \partial_x(\gamma \rho s v) = -\frac{4\pi}{T} \int_{-1}^1 \gamma \left(1 - \mu \frac{v}{c} \right) S(\mu) \frac{d\mu}{2}, \quad (3.198)$$

et la loi de bilan pour l'entropie radiative :

$$\partial_t S_r + \partial_x Q_r = 4\pi \int_{-1}^1 \left(\frac{4\pi}{ac} I \right)^{-1/4} S(\mu) \frac{d\mu}{2}. \quad (3.199)$$

La loi de bilan pour l'entropie totale s'écrit alors :

$$\partial_t(-\gamma \rho s - S_r) + \partial_x(-\gamma \rho s v - Q_r) = 4\pi \int_{-1}^1 \left[\frac{\gamma \left(1 - \mu \frac{v}{c} \right)}{T} - \left(\frac{4\pi}{ac} I \right)^{-1/4} \right] S(\mu) \frac{d\mu}{2}. \quad (3.200)$$

La production totale d'entropie du système s'écrit alors :

$$4\pi \int_{-1}^1 \left[f \left(\frac{ac}{4\pi} \frac{T^4}{\gamma^4 \left(1 - \mu \frac{v}{c} \right)^4} \right) - f(I) \right] \sigma_a \gamma \left(1 - \mu \frac{v}{c} \right) \left[\frac{ac}{4\pi} \frac{T^4}{\gamma^4 \left(1 - \mu \frac{v}{c} \right)^4} - I \right] \frac{d\mu}{2}. \quad (3.201)$$

où on a posé :

$$f(x) = \left(\frac{4\pi}{ac} x \right)^{-1/4}. \quad (3.202)$$

Par décroissance de la fonction f , l'intégrale ci-dessus est bien négative, ce qui termine la démonstration. \square

3.3.4 Limites de diffusion grise

Dans cette section, on étudie deux régimes asymptotiques du modèle (3.172) dans l'hypothèse où les opacités sont supposés indépendantes de la fréquence. Ces modèles, appelés *diffusion à l'équilibre* et *hors équilibre*, sont obtenus par développements de Chapman-Enskog de (3.172) dans deux limites asymptotiques différentes. On a déjà effectué cette étude dans le cadre classique. On montre dans cette section que, dans le cas relativiste, on retrouve les mêmes modèles limites que dans le cas classique. Pour cela, il suffit de montrer que les équations d'Euler relativistes se réduisent aux équations d'Euler classiques dans les deux limites asymptotiques étudiées. Ce résultat est d'ailleurs affirmé sans démonstration dans [BD04]. Pour montrer ce résultat, on commence par réécrire les équations d'Euler relativistes sous leur forme adimensionnée. On propose l'adimensionnement tel qu'il est adopté dans [BD04] et [LMH99] :

$$x = \hat{x}\ell, \quad t = \hat{t}\frac{\ell}{v_\infty}, \quad v = \hat{v}v_\infty, \quad \rho_0 = \hat{\rho}_0\rho_\infty, \quad \varepsilon = \hat{\varepsilon}v_\infty^2, \quad p = \hat{p}\rho_\infty v_\infty^2, \quad h = \hat{h}v_\infty^2. \quad (3.203)$$

Avec cet adimensionnement, le système des équations d'Euler relativistes s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t(\gamma\rho_0) + \partial_x(\gamma\rho_0 v) = 0, \\ \partial_t(\gamma^2\rho_0(1 + h/\mathcal{C}^2)v) + \partial_x(\gamma^2\rho_0(1 + h/\mathcal{C}^2)v^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\gamma^2\rho_0(\mathcal{C}^2 + h) - p) + \partial_x(\gamma^2\rho_0(\mathcal{C}^2 + h)v) = 0, \end{cases} \quad (3.204)$$

où $\mathcal{C} = c/v_\infty$. On montre que dans la limite asymptotique $\mathcal{C} = 1/\epsilon$, $\epsilon \ll 1$, le système ci-dessus se réduit aux équations d'Euler classiques. On effectue un développement de Taylor en puissance de ϵ pour toute fonction f de la manière suivante :

$$f = f^{(0)} + \epsilon f^{(1)} + \epsilon^2 f^{(2)} + \dots \quad (3.205)$$

On écrit le terme d'ordre 0 en ϵ pour chaque équation. Cela donne pour l'équation de conservation de la masse :

$$\partial_t \rho_0^{(0)} + \partial_x(\rho_0^{(0)} v^{(0)}) = 0. \quad (3.206)$$

De même, pour l'équation de conservation de l'impulsion, on a :

$$\partial_t(\rho_0^{(0)} v^{(0)}) + \partial_x(\rho_0^{(0)} (v^{(0)})^2 + p^{(0)}) = 0. \quad (3.207)$$

Pour la dernière équation, on constate qu'il y a des termes d'ordres $1/\epsilon^2$ et $1/\epsilon$. Pour éliminer ces termes, on soustrait tout d'abord \mathcal{C}^2 fois la première équation à la troisième :

$$\partial_t((\gamma - 1)\gamma\rho_0\mathcal{C}^2 + \gamma^2\rho_0 h - p) + \partial_x((\gamma - 1)\gamma\rho_0 v\mathcal{C}^2 + \gamma^2\rho_0 h v) = 0. \quad (3.208)$$

Les termes dominants de cette dernière équation sont bien d'ordre 0 en ϵ puisque :

$$\gamma - 1 = \frac{1}{2}(v^{(0)})^2\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \quad (3.209)$$

On a alors :

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \rho_0^{(0)} (v^{(0)})^2 + \rho_0^{(0)} h^{(0)} - p^{(0)} \right) + \partial_x \left(\frac{1}{2} \rho_0^{(0)} (v^{(0)})^3 + \rho_0^{(0)} h^{(0)} v^{(0)} \right) = 0. \quad (3.210)$$

Enfin, en utilisant la relation $h^{(0)} = \varepsilon^{(0)} + \frac{p^{(0)}}{\rho_0^{(0)}}$, il vient :

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \rho_0^{(0)} (v^{(0)})^2 + \rho_0^{(0)} \varepsilon^{(0)} \right) + \partial_x \left(\frac{1}{2} \rho_0^{(0)} (v^{(0)})^3 + \rho_0^{(0)} \varepsilon^{(0)} v^{(0)} + p^{(0)} v^{(0)} \right) = 0. \quad (3.211)$$

Finalement, on remarque bien que les équations (3.206), (3.207) et (3.211) s'identifient aux équations d'Euler classiques, ce qui termine notre démonstration. On peut donc conclure que les limites diffusion à l'équilibre et hors équilibre du modèle (3.172) sont identiques à celle dérivées dans le cas classique.

3.3.5 Modèle P_1 gris

Dans cette partie, on étudie un modèle aux moments classique gris construit en couplant les équations d'Euler relativistes aux deux premiers moments intégrés en fréquence de l'équation de transfert. Ce modèle s'apparente aux modèles choisis dans les articles [FLLS08] et [TOS⁺13]. Cependant, dans ces deux articles, les modèles utilisés sont fermés par une condition de type VEF (dans [FLLS08], c'est une condition P_1) dans le référentiel comobile, *i.e.* de la forme $P_0 = P_0(E_0, F_0)$. Dans ce qui suit, le modèle présenté est fermé par une condition P_1 dans le référentiel fixe du laboratoire, *i.e.* de la forme $P = E/3$. Le modèle s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t(\gamma \rho_0) + \partial_x(\gamma \rho_0 v) = 0, \\ \partial_t(\gamma^2 \rho_0 (1 + h/c^2) v) + \partial_x(\gamma^2 \rho_0 (1 + h/c^2) v^2 + p) = -g, \\ \partial_t(\gamma^2 \rho_0 (c^2 + h) - p) + \partial_x(\gamma^2 \rho_0 (c^2 + h) v) = -cG^0, \\ \partial_t E + \partial_x F = cG^0, \\ \frac{1}{c^2} \partial_t F + \frac{1}{3} \partial_x E = g. \end{cases} \quad (3.212)$$

Dans (3.212), v désigne la vitesse de la matière, $\rho_0, p, \varepsilon, h = \varepsilon + p/\rho_0$ sont respectivement la masse volumique, la pression, l'énergie interne spécifique et l'enthalpie spécifique de la matière dans le référentiel comobile, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ désigne le facteur de Lorentz, E, F sont respectivement la densité et le flux d'énergie radiative et cG^0, g respectivement les quantités d'énergie et d'impulsion transmises de la matière au rayonnement par unité de volume et de temps. Toutes ces quantités dépendent de l'espace et du temps. Pour les expressions des termes sources G^0 et g , on propose deux choix. Le premier consiste à prendre les deux premiers moments intégrés en fréquence de (3.188), on obtient :

$$G^0 = \gamma \sigma_a (aT^4 - E) + \gamma \sigma_a \frac{v}{c} F, \quad g = -\gamma \sigma_a \frac{F}{c} + \gamma \sigma_a \frac{v}{c} (aT^4 + E/3), \quad (3.213)$$

Le second consiste à modifier légèrement les expressions ci-dessous, tout en restant exact à $\mathcal{O}(v^2/c^2)$ près par rapport à (3.213) :

$$G^0 = \gamma\sigma_a \left(\frac{aT^4}{2\gamma^4} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{v}{c}\right)^3} + \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{v}{c}\right)^3} \right] - E \right) + \gamma\sigma_a \frac{v}{c} \frac{F}{c}, \quad (3.214)$$

$$g = -\gamma\sigma_a \frac{F}{c} + \gamma\sigma_a \frac{v}{c} \left(\frac{aT^4}{2\sqrt{3}\gamma^4} \left[\frac{1}{\frac{v}{c} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{v}{c}\right)^3} - \frac{1}{\frac{v}{c} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{v}{c}\right)^3} \right] + E/3 \right). \quad (3.215)$$

où l'on utilise l'approximation P_1 dans la deuxième expression. Dans (3.213), T désigne la température de la matière, σ_a l'opacité d'absorption moyennée sur tout le spectre de fréquence mesurée dans le référentiel comobile et $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ le facteur de Lorentz. Ces quantités sont des fonctions qui dépendent de l'espace et du temps. Pour fermer le système, on dispose d'une équation reliant T , ρ_0 et ε , d'une formule analytique pour l'opacité σ_a qui dépend de ρ_0 , T et ν_0 , et de l'équation d'état du fluide de la forme $EOS(\rho_0, \varepsilon, p) = 0$. On étudie à présent les propriétés mathématiques de ces deux modèles.

Propriété 3.12. Les solutions classiques du système d'équations (3.212) avec termes sources (3.213) vérifient les propriétés suivantes :

– conservation de l'énergie totale :

$$\partial_t(\gamma^2\rho_0(c^2 + h) - p + E) + \partial_x(\gamma^2\rho_0(c^2 + h)v + F) = 0, \quad (3.216)$$

– conservation de la quantité de mouvement totale :

$$\partial_t(\gamma^2\rho_0(1 + h/c^2)v + F/c^2) + \partial_x(\gamma^2\rho_0(1 + h/c^2)v^2 + p + P) = 0, \quad (3.217)$$

Propriété 3.13. Les solutions classiques du système d'équations (3.212) avec termes sources (3.213) ne dissipent pas l'entropie totale S_t définie par :

$$S_t = \gamma\rho s + \frac{2}{3}aT_1^3 + \frac{2}{3}aT_2^3, \quad (3.218)$$

où T_1 et T_2 sont les températures radiatives définies par :

$$E + \frac{\sqrt{3}}{c}F = aT_1^4, \quad E - \frac{\sqrt{3}}{c}F = aT_2^4. \quad (3.219)$$

Identiquement au cas classique, l'approximation P_1 « casse » le caractère entropique du modèle de transport. Pour obtenir un modèle P_1 entropique, il est nécessaire de dégrader les termes sources, c'est-à-dire d'utiliser les formules (3.214) et (3.215).

Propriété 3.14. Les solutions classiques du système d'équations (3.212) avec les termes sources (3.214) et (3.215) vérifient les propriétés suivantes :

– conservation de l'énergie totale :

$$\partial_t(\gamma^2 \rho_0(c^2 + h) - p + E) + \partial_x(\gamma^2 \rho_0(c^2 + h)v + F) = 0, \quad (3.220)$$

– conservation de la quantité de mouvement totale :

$$\partial_t(\gamma^2 \rho_0(1 + h/c^2)v + F/c^2) + \partial_x(\gamma^2 \rho_0(1 + h/c^2)v^2 + p + P) = 0, \quad (3.221)$$

– dissipation locale de l'entropie totale :

$$\partial_t(-\gamma \rho s - S_r) + \partial_x(-\gamma \rho s v - Q_r) = W, \quad (3.222)$$

avec :

$$S_r = \frac{2}{3}aT_1^3 + \frac{2}{3}aT_2^3, \quad (3.223)$$

$$Q_r = \frac{2}{3}a\frac{c}{\sqrt{3}}T_1^3 - \frac{2}{3}a\frac{c}{\sqrt{3}}T_2^3. \quad (3.224)$$

$$\begin{aligned} W = & -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{\gamma \left(1 - \frac{v}{c\sqrt{3}}\right)}{T} \right) \gamma \left(1 - \frac{v}{c\sqrt{3}}\right) \sigma_{ac} \left[\frac{T^4}{\gamma^4 \left(1 - \frac{v}{c\sqrt{3}}\right)^4} - T_1^4 \right] \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{\gamma \left(1 + \frac{v}{c\sqrt{3}}\right)}{T} \right) \gamma \left(1 + \frac{v}{c\sqrt{3}}\right) \sigma_{ac} \left[\frac{T^4}{\gamma^4 \left(1 + \frac{v}{c\sqrt{3}}\right)^4} - T_2^4 \right] \leq 0. \end{aligned} \quad (3.225)$$

Démonstration. Si on considère une solution classique de (3.212) avec les termes sources donnés par (3.214) et (3.215), celle-ci vérifie la loi de bilan pour l'entropie du fluide :

$$\begin{aligned} & \partial_t(-\gamma \rho s) + \partial_x(-\gamma \rho s v) \\ &= \frac{1}{2T} \gamma^2 \left(1 - \frac{v}{c\sqrt{3}}\right)^2 \sigma_{ac} \left[\frac{T^4}{\gamma^4 \left(1 - \frac{v}{c\sqrt{3}}\right)^4} - T_1^4 \right] \\ &+ \frac{1}{2T} \gamma^2 \left(1 + \frac{v}{c\sqrt{3}}\right)^2 \sigma_{ac} \left[\frac{T^4}{\gamma^4 \left(1 + \frac{v}{c\sqrt{3}}\right)^4} - T_2^4 \right], \end{aligned} \quad (3.226)$$

Pour le rayonnement, on a les deux équations suivantes, obtenues en combinant les deux équations sur E et F :

$$\frac{1}{c} \partial_t I_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \partial_x I_1 = cG_0 + c\sqrt{3}g, \quad I_1 = c \left(E + \frac{\sqrt{3}}{c} F \right), \quad (3.227)$$

$$\frac{1}{c}\partial_t I_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\partial_x I_2 = cG_0 - c\sqrt{3}g, \quad I_2 = c \left(E - \frac{\sqrt{3}}{c}F \right). \quad (3.228)$$

Après calculs, on a :

$$cG_0 + c\sqrt{3}g = \gamma \left(1 - \frac{v}{c\sqrt{3}} \right) \sigma_{aac} \left[\frac{T^4}{\gamma^4 \left(1 - \frac{v}{c\sqrt{3}} \right)^4} - T_1^4 \right], \quad (3.229)$$

$$cG_0 - c\sqrt{3}g = \gamma \left(1 + \frac{v}{c\sqrt{3}} \right) \sigma_{aac} \left[\frac{T^4}{\gamma^4 \left(1 + \frac{v}{c\sqrt{3}} \right)^4} - T_2^4 \right], \quad (3.230)$$

En divisant l'équation sur I_1 par $2T_1$ et l'équation sur I_2 par $2T_2$, on obtient les deux équations suivantes :

$$\partial_t \left(\frac{2}{3}aT_1^3 \right) + \partial_x \left(\frac{c}{\sqrt{3}} \frac{2}{3}aT_1^3 \right) = \frac{1}{2T_1} \gamma \left(1 - \frac{v}{c\sqrt{3}} \right) \sigma_{aac} \left[\frac{T^4}{\gamma^4 \left(1 - \frac{v}{c\sqrt{3}} \right)^4} - T_1^4 \right], \quad (3.231)$$

$$\partial_t \left(\frac{2}{3}aT_2^3 \right) - \partial_x \left(\frac{c}{\sqrt{3}} \frac{2}{3}aT_2^3 \right) = \frac{1}{2T_2} \gamma \left(1 + \frac{v}{c\sqrt{3}} \right) \sigma_{aac} \left[\frac{T^4}{\gamma^4 \left(1 + \frac{v}{c\sqrt{3}} \right)^4} - T_2^4 \right], \quad (3.232)$$

Enfin, en sommant ces deux dernières équations avec la loi de bilan pour l'entropie hydrodynamique, on obtient la loi de bilan pour l'entropie totale du système :

$$\begin{aligned} & \partial_t \left(-\gamma\rho s - \frac{2}{3}aT_1^3 - \frac{2}{3}aT_2^3 \right) + \partial_x \left(-\gamma\rho sv - \frac{c}{\sqrt{3}} \frac{2}{3}aT_1^3 + \frac{c}{\sqrt{3}} \frac{2}{3}aT_2^3 \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{\gamma \left(1 - \frac{v}{c\sqrt{3}} \right)}{T} \right) \gamma \left(1 - \frac{v}{c\sqrt{3}} \right) \sigma_{aac} \left[\frac{T^4}{\gamma^4 \left(1 - \frac{v}{c\sqrt{3}} \right)^4} - T_1^4 \right] \\ & \quad - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{\gamma \left(1 + \frac{v}{c\sqrt{3}} \right)}{T} \right) \gamma \left(1 + \frac{v}{c\sqrt{3}} \right) \sigma_{aac} \left[\frac{T^4}{\gamma^4 \left(1 + \frac{v}{c\sqrt{3}} \right)^4} - T_2^4 \right]. \end{aligned} \quad (3.233)$$

On constate que le terme source est bien négatif, ce qui termine la démonstration. \square

3.3.6 Modèle P_N gris

Dans cette partie, on étudie un modèle P_N relativiste gris construit par extension du modèle P_1 entropique étudié dans la section précédente. Le modèle est construit en couplant les équations d'Euler relativistes avec un système d'équations obtenu en

projetant l'équation de transfert sur une base tronquée d'harmoniques sphériques. Le modèle s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t(\gamma\rho_0) + \partial_x(\gamma\rho_0 v) = 0, \\ \partial_t(\gamma^2\rho_0(1+h/c^2)v) + \partial_x(\gamma^2\rho_0(1+h/c^2)v^2 + p) = -\frac{S_1}{c\sqrt{3}}, \\ \partial_t(\gamma^2\rho_0(c^2+h) - p) + \partial_x(\gamma^2\rho_0(c^2+h)v) = -S_0, \\ \frac{1}{c}\partial_t\mathbf{u} + \mathbf{A}\partial_x\mathbf{u} = \mathbf{s}. \end{cases} \quad (3.234)$$

Dans (3.234), v désigne la vitesse de la matière, $\rho_0, p, \varepsilon, h = \varepsilon + p/\rho_0$ sont respectivement la masse volumique, la pression, l'énergie interne spécifique et l'enthalpie spécifique de la matière dans le référentiel comobile, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ désigne le facteur de Lorentz, $\mathbf{u} = (I_0, \dots, I_N)^t$ et $\mathbf{s} = (S_0, \dots, S_N)^t$ désignent les vecteurs des projections sur la base orthonormée des polynômes de Legendre de l'intensité radiative et du terme source de l'équation de transfert (intégrés en fréquence) :

$$I_n = 4\pi \int_{-1}^1 I(\mu) \bar{P}_n(\mu) \frac{d\mu}{2}, \quad S_n = 4\pi \int_{-1}^1 S(\mu) \bar{P}_n(\mu) \frac{d\mu}{2}, \quad (3.235)$$

où S est donné par la formule (3.188), et \bar{P}_n désigne le polynôme de Legendre normé d'ordre n . Toutes ces quantités sont des fonctions qui dépendent de l'espace et du temps. En notation vectorielle, le vecteur \mathbf{s} s'exprime :

$$\mathbf{s} = (S_0, \dots, S_N)^t = \gamma\sigma_a(\mathbf{b} - \mathbf{u}) - \gamma\sigma_a \frac{v}{c} \mathbf{A}(\mathbf{b} - \mathbf{u}). \quad (3.236)$$

On néglige le phénomène de scattering. Dans (3.236), σ_a désigne l'opacité d'absorption moyennée sur tout le spectre de fréquence et $\mathbf{b} = (B_0, \dots, B_N)^t$ représente le vecteur des projections de la fonction $\mu \mapsto \frac{ac}{4\pi} \frac{T^4}{\gamma^4 (1 - \mu \frac{v}{c})^4}$ sur la base orthonormée des polynômes de Legendre :

$$B_n = 4\pi \int_{-1}^1 \frac{ac}{4\pi} \frac{T^4}{\gamma^4 (1 - \mu \frac{v}{c})^4} \bar{P}_n(\mu) \frac{d\mu}{2}. \quad (3.237)$$

On peut dériver les expressions analytiques des B_n pour $n \leq 4$. Cependant on ne les utilise pas et on fait l'approximation suivante :

$$B_n = acT^4 \sum_{k=0}^N \omega_k \frac{\bar{P}_n(\lambda_k)}{\gamma^4 (1 - \lambda_k \frac{v}{c})^4}, \quad (3.238)$$

où ω_k et λ_k désignent respectivement les poids et les points associés à la quadrature de Gauss-Legendre. Dans (3.238), T désigne la température de la matière qui est une fonction du temps et de l'espace. Enfin, la matrice \mathbf{A} est une matrice constante dont les coefficients sont données par :

$$A_{ij} = \frac{j+1}{\sqrt{(2j+1)(2j+3)}} \delta_{j,i-1} + \frac{i+1}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}} \delta_{j,i+1} = A_{ji}. \quad (3.239)$$

Pour fermer le système, on dispose d'une équation reliant T , ρ_0 et ε , d'une formule analytique pour l'opacité σ_a qui dépend de ρ_0 et T , et de l'équation d'état du fluide de la forme $EOS(\rho_0, \varepsilon, p) = 0$. On étudie à présent les propriétés mathématiques de ce modèle.

Propriété 3.15. Les solutions classiques du système d'équations (3.234) vérifient les propriétés suivantes :

– conservation de l'énergie totale :

$$\partial_t(\gamma^2 \rho_0(c^2 + h) - p + E) + \partial_x(\gamma^2 \rho_0(c^2 + h)v + F) = 0, \quad (3.240)$$

– conservation de la quantité de mouvement totale :

$$\partial_t(\gamma^2 \rho_0(1 + h/c^2)v + F/c^2) + \partial_x(\gamma^2 \rho_0(1 + h/c^2)v^2 + p + P) = 0, \quad (3.241)$$

– dissipation locale de l'entropie totale :

$$\partial_t(-\gamma \rho s - S_r) + \partial_x(-\gamma \rho s v - Q_r) = W, \quad (3.242)$$

avec :

$$S_r = \sum_{n=0}^N \omega_n \frac{4}{3} a T_n^3, \quad Q_r = \sum_{n=0}^N \omega_n \lambda_n \frac{4}{3} a c T_n^3, \quad (3.243)$$

$$Q_r = \frac{2}{3} a \frac{c}{\sqrt{3}} T_1^3 - \frac{2}{3} a \frac{c}{\sqrt{3}} T_2^3, \quad (3.244)$$

$$W = -\gamma \sigma_a a c \sum_{n=0}^N \omega_n \left[\frac{1}{T_n} - \frac{\gamma (1 - \lambda_n \frac{v}{c})}{T} \right] \left(1 - \lambda_n \frac{v}{c} \right) \left[\frac{T^4}{\gamma^4 (1 - \lambda_n \frac{v}{c})^4} - T_n^4 \right] \leq 0, \quad (3.245)$$

où les T_n sont définies par :

$$\omega_n a c T_n^4 = (\mathbf{R}^{-1} \mathbf{u})_n, \quad (3.246)$$

avec \mathbf{R} la matrice des vecteurs propres de \mathbf{A} .

Démonstration. On considère une solution classique de (3.234). On pose :

$$\mathbf{u}^* = (I_0^*, \dots, I_N^*)^t = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}, \quad (3.247)$$

$$\mathbf{b}^* = (B_0^*, \dots, B_N^*)^t = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b}. \quad (3.248)$$

La loi de bilan pour l'entropie hydrodynamique s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \partial_t(\gamma \rho s) + \partial_x(\gamma \rho s v) &= -\frac{1}{T} \left(S_0 - \frac{v}{c\sqrt{3}} S_1 \right) \\ &= -\frac{1}{T} \gamma^2 \sigma_a \sum_{n=0}^N \left(1 - \lambda_n \frac{v}{c} \right) (B_n^* - I_n^*) \left(R_{0n} - \frac{v}{c\sqrt{3}} R_{1n} \right) \\ &= -\frac{1}{T} \gamma^2 \sigma_a \sum_{n=0}^N \left(1 - \lambda_n \frac{v}{c} \right)^2 (B_n^* - I_n^*), \end{aligned} \quad (3.249)$$

où on a utilisé le fait que $R_{0n} = 1$ et $R_{1n} = \sqrt{3}\lambda_n$. En multipliant par R^{-1} les projections de l'équation de transfert, on obtient le système suivant :

$$\frac{1}{c}\partial_t \mathbf{u}^* + D\partial_x \mathbf{u}^* = R^{-1}\mathbf{s} = \gamma\sigma_a(\mathbf{b}^* - \mathbf{u}^*) - \gamma\sigma_a\frac{v}{c}D(\mathbf{b}^* - \mathbf{u}^*). \quad (3.250)$$

Ou encore, pour tout n :

$$\frac{1}{c}\partial_t I_n^* + \lambda_n\partial_x I_n^* = \gamma\sigma_a\left(1 - \lambda_n\frac{v}{c}\right)(B_n^* - I_n^*). \quad (3.251)$$

En posant pour tout n :

$$I_n^* = \omega_n ac T_n^4, \quad (3.252)$$

avec ω_n les poids associés à la quadrature de Gauss-Legendre. En divisant la dernière équation par T_n , on obtient :

$$\partial_t\left(\omega_n\frac{4}{3}aT_n^3\right) + \partial_x\left(\omega_n\frac{4}{3}ac\lambda_nT_n^3\right) = \frac{1}{T_n}\gamma\sigma_a\left(1 - \lambda_n\frac{v}{c}\right)(B_n^* - I_n^*). \quad (3.253)$$

Enfin, en sommant toutes les lois de bilan entropique, on a :

$$\begin{aligned} & \partial_t\left(-\gamma\rho s - \sum_{n=0}^N \omega_n\frac{4}{3}aT_n^3\right) + \partial_x\left(-\gamma\rho sv - \sum_{n=0}^N \omega_n\frac{4}{3}ac\lambda_nT_n^3\right) \\ &= -\gamma\sigma_a\sum_{n=0}^N \left[\frac{1}{T_n} - \frac{\gamma\left(1 - \lambda_n\frac{v}{c}\right)}{T}\right]\left(1 - \lambda_n\frac{v}{c}\right)(B_n^* - ac\omega_nT_n^4), \end{aligned} \quad (3.254)$$

En remplaçant B_n^* par son expression :

$$B_n^* = ac\omega_n\frac{T^4}{\gamma^4\left(1 - \lambda_n\frac{v}{c}\right)^4}, \quad (3.255)$$

la production d'entropie s'écrit :

$$-\gamma\sigma_a ac\sum_{n=0}^N \omega_n\left[\frac{1}{T_n} - \frac{\gamma\left(1 - \lambda_n\frac{v}{c}\right)}{T}\right]\left(1 - \lambda_n\frac{v}{c}\right)\left[\frac{T^4}{\gamma^4\left(1 - \lambda_n\frac{v}{c}\right)^4} - T_n^4\right]. \quad (3.256)$$

L'expression ci-dessus est bien négative, ce qui termine la démonstration. \square

On étudie à présent la limite diffusion du modèle (3.234). Avant toute chose, on adimensionne le système d'équations étudié. On choisit pour cela l'adimensionnement suivant, conformément à [LMH99] :

$$x = \hat{x}\ell, \quad t = \hat{t}\frac{\ell}{v_\infty}, \quad v = \hat{v}v_\infty, \quad \rho_0 = \hat{\rho}_0\rho_\infty, \quad \varepsilon = \hat{\varepsilon}v_\infty^2, \quad p = \hat{p}\rho_\infty v_\infty^2, \quad h = \hat{h}v_\infty^2, \quad (3.257)$$

$$T = \hat{T}T_\infty, \quad \gamma = \left(1 - \frac{\hat{v}^2}{\mathcal{C}^2}\right)^{-1/2}, \quad \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}acT_\infty^4, \quad \mathbf{b} = \hat{\mathbf{b}}acT_\infty^4, \quad \sigma_a = \frac{\hat{\sigma}_a}{\lambda_a}. \quad (3.258)$$

Le système d'équations (3.234) adimensionné s'écrit alors :

$$\begin{cases} \partial_t(\gamma\rho_0) + \partial_x(\gamma\rho_0 v) = 0, \\ \partial_t(\gamma^2\rho_0(1 + h/\mathcal{C}^2)v) + \partial_x(\gamma^2\rho_0(1 + h/\mathcal{C}^2)v^2 + p) = -\mathcal{P}\frac{S_1}{\sqrt{3}}, \\ \partial_t(\gamma^2\rho_0(\mathcal{C}^2 + h) - p) + \partial_x(\gamma^2\rho_0(\mathcal{C}^2 + h)v) = -\mathcal{P}\mathcal{C}S_0, \\ \frac{1}{\mathcal{C}}\partial_t\mathbf{u} + \mathbf{A}\partial_x\mathbf{u} = \mathbf{s}, \end{cases} \quad (3.259)$$

avec :

$$\mathbf{s} = (S_0, \dots, S_N)^t = \mathcal{L}_a\gamma\sigma_a(\mathbf{b} - \mathbf{u}) - \mathcal{L}_a\gamma\frac{v}{\mathcal{C}}\sigma_a(\mathbf{b} - \mathbf{u}), \quad \mathbf{b} = (B_0, \dots, B_N)^t, \quad (3.260)$$

$$\forall n \in \{0, \dots, N\}, \quad B_n = T^4 \sum_{k=0}^N \omega_k \frac{\bar{P}_n(\lambda_k)}{\gamma^4 (1 - \lambda_k \frac{v}{\mathcal{C}})^4}. \quad (3.261)$$

L'adimensionnement fait apparaître 3 nombres sans dimension :

$$\mathcal{C} = \frac{c}{v_\infty}, \quad \mathcal{L}_a = \frac{\ell}{\lambda_a}, \quad \mathcal{P} = \frac{aT_\infty^4}{\rho_\infty v_\infty^2}. \quad (3.262)$$

Pour étudier la limite diffusion du système d'équations (3.259), on se place dans le régime asymptotique suivant conformément à [BD04] et [LMH99] :

$$\mathcal{P} = 1, \quad \mathcal{C} = 1/\epsilon, \quad \mathcal{L}_a = 1/\epsilon, \quad \epsilon \ll 1. \quad (3.263)$$

On a alors la propriété suivante.

Propriété 3.16. Dans la limite asymptotique (3.263), le système d'équations (3.259) tend vers le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \partial_t\rho + \partial_x(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x\left(\rho v^2 + p + \frac{T^4}{3}\right) = 0, \\ \partial_t(\rho e + T^4) + \partial_x\left(\rho e v + p v + \frac{4}{3}T^4 v\right) = \partial_x\left(\frac{1}{3\sigma_a}\partial_x T^4\right). \end{cases} \quad (3.264)$$

Notons que ce résultat est purement formel et il en est de même pour la démonstration ci dessous. En toute rigueur, on montre que uniquement que, s'il y a convergence, alors la convergence s'effectue vers la bonne limite.

Démonstration. On effectue un développement de Taylor en puissance de ϵ pour toute fonction f présente dans le système de la manière suivante :

$$f = f^{(0)} + \epsilon f^{(1)} + \epsilon^2 f^{(2)} + \dots \quad (3.265)$$

On a :

$$\gamma \rho_0 = \rho_0^{(0)} + \epsilon \rho_0^{(1)} + \epsilon^2 \left(\rho_0^{(2)} + \frac{1}{2} \rho_0^{(0)} (v^{(0)})^2 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (3.266)$$

$$\begin{aligned} \gamma \rho_0 v &= \rho_0^{(0)} v^{(0)} + \epsilon (\rho_0^{(0)} v^{(1)} + \rho_0^{(1)} v^{(0)}) \\ &+ \epsilon^2 \left(\rho_0^{(0)} v^{(2)} + \rho_0^{(1)} v^{(1)} + \rho_0^{(2)} v^{(0)} + \frac{1}{2} \rho_0^{(0)} (v^{(0)})^3 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^3), \end{aligned} \quad (3.267)$$

$$\begin{aligned} \gamma^2 \rho_0 (1 + h/\mathcal{C}^2) v &= \rho_0^{(0)} v^{(0)} + \epsilon (\rho_0^{(0)} v^{(1)} + \rho_0^{(1)} v^{(0)}) \\ &+ \epsilon^2 \left(\rho_0^{(0)} v^{(2)} + \rho_0^{(1)} v^{(1)} + \rho_0^{(2)} v^{(0)} + \rho_0^{(0)} h^{(0)} v^{(0)} + \rho_0^{(0)} (v^{(0)})^3 \right) \\ &+ \mathcal{O}(\epsilon^3), \end{aligned} \quad (3.268)$$

$$\begin{aligned} \gamma^2 \rho_0 (1 + h/\mathcal{C}^2) v^2 &= \rho_0^{(0)} (v^{(0)})^2 + \epsilon (2 \rho_0^{(0)} v^{(0)} v^{(1)} + \rho_0^{(1)} (v^{(0)})^2) \\ &+ \epsilon^2 \left[\rho_0^{(0)} v^{(0)} v^{(2)} + (\rho_0^{(0)} v^{(1)} + \rho_0^{(1)} v^{(0)}) v^{(1)} \right. \\ &+ (\rho_0^{(2)} v^{(0)} + \rho_0^{(1)} v^{(1)} + \rho_0^{(0)} v^{(2)} + \rho_0^{(0)} h^{(0)} v^{(0)} + \rho_0^{(0)} (v^{(0)})^3) v^{(0)} \left. \right] \\ &+ \mathcal{O}(\epsilon^3), \end{aligned} \quad (3.269)$$

$$\gamma^2 \rho_0 (\mathcal{C}^2 + h) = \frac{1}{\epsilon^2} \rho_0^{(0)} + \frac{1}{\epsilon} \rho_0^{(1)} + \rho_0^{(0)} (v^{(0)})^2 + \rho_0^{(2)} + \rho_0^{(0)} h^{(0)} + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (3.270)$$

$$\begin{aligned} \gamma^2 \rho_0 (\mathcal{C}^2 + h) v &= \frac{1}{\epsilon^2} \rho_0^{(0)} v^{(0)} + \frac{1}{\epsilon} (\rho_0^{(0)} v^{(1)} + \rho_0^{(1)} v^{(0)}) \\ &+ \rho_0^{(0)} v^{(2)} + \rho_0^{(1)} v^{(1)} + \rho_0^{(0)} (v^{(0)})^3 + \rho_0^{(2)} v^{(0)} + \rho_0^{(0)} v^{(0)} h^{(0)} + \mathcal{O}(\epsilon), \end{aligned} \quad (3.271)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \frac{1}{\epsilon} \sigma_a (\mathbf{b}^{(0)} - \mathbf{u}^{(0)}) + \sigma_a (\mathbf{b}^{(1)} - \mathbf{u}^{(1)}) - \sigma_a v^{(0)} (\mathbf{b}^{(0)} - \mathbf{u}^{(0)}) \\ &+ \epsilon \sigma_a \left[\frac{1}{2} (v^{(0)})^2 (\mathbf{b}^{(0)} - \mathbf{u}^{(0)}) + \mathbf{b}^{(2)} - \mathbf{u}^{(2)} - v^{(0)} (\mathbf{b}^{(1)} - \mathbf{u}^{(1)}) - v^{(1)} (\mathbf{b}^{(0)} - \mathbf{u}^{(0)}) \right] \\ &+ \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (3.272)$$

Pour chaque équation du système (3.259), on identifie les termes du même ordre en ϵ .

– Première équation :

$$\partial_t \rho_0^{(0)} + \partial_x (\rho_0^{(0)} v^{(0)}) = 0, \quad (3.273)$$

$$\partial_t \rho_0^{(1)} + \partial_x (\rho_0^{(0)} v^{(1)} + \rho_0^{(1)} v^{(0)}) = 0, \quad (3.274)$$

$$\partial_t \left(\rho_0^{(2)} + \frac{1}{2} \rho_0^{(0)} (v^{(0)})^2 \right) + \partial_x \left(\rho_0^{(0)} v^{(2)} + \rho_0^{(1)} v^{(1)} + \rho_0^{(2)} v^{(0)} + \frac{1}{2} \rho_0^{(0)} (v^{(0)})^3 \right) = 0. \quad (3.275)$$

– Deuxième équation :

$$0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_a (B_1^{(0)} - I_1^{(0)}), \quad (3.276)$$

$$\partial_t (\rho_0^{(0)} v^{(0)}) + \partial_x [\rho_0^{(0)} (v^{(0)})^2 + p^{(0)}] = -\frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_a (B_1^{(1)} - I_1^{(1)}) + \frac{v^{(0)}}{\sqrt{3}} \sigma_a (B_1^{(0)} - I_1^{(0)}). \quad (3.277)$$

– Troisième équation :

$$\partial_t \rho_0^{(0)} + \partial_x (\rho_0^{(0)} v^{(0)}) = -\sigma_a (B_0^{(0)} - I_0^{(0)}), \quad (3.278)$$

$$\partial_t \rho_0^{(1)} + \partial_x (\rho_0^{(0)} v^{(1)} + \rho_0^{(1)} v^{(0)}) = -\sigma_a (B_0^{(1)} - I_0^{(1)}) + \sigma_a v^{(0)} (B_0^{(0)} - I_0^{(0)}), \quad (3.279)$$

$$\begin{aligned} & \partial_t (\rho_0^{(0)} \varepsilon^{(0)} + \rho_0^{(2)} + \rho_0^{(0)} (v^{(0)})^2) \\ & + \partial_x (\rho_0^{(0)} \varepsilon^{(0)} v^{(0)} + p^{(0)} v^{(0)} + \rho_0^{(2)} v^{(0)} + \rho_0^{(1)} v^{(1)} + \rho_0^{(0)} v^{(2)} + \rho_0^{(0)} (v^{(0)})^3) \\ & = -\sigma_a (B_0^{(2)} - I_0^{(2)}) - \frac{1}{2} \sigma_a (v^{(0)})^2 (B_0^{(0)} - I_0^{(0)}) \\ & + \sigma_a v^{(0)} (B_0^{(1)} - I_0^{(1)}) + \sigma_a v^{(1)} (B_0^{(0)} - I_0^{(0)}). \end{aligned} \quad (3.280)$$

– Quatrième équation :

$$0 = \sigma_a (\mathbf{b}^{(0)} - \mathbf{u}^{(0)}), \quad (3.281)$$

$$\mathbf{A} \partial_x \mathbf{u}^{(0)} = \sigma_a (\mathbf{b}^{(1)} - \mathbf{u}^{(1)}) - \sigma_a v^{(0)} (\mathbf{b}^{(0)} - \mathbf{u}^{(0)}), \quad (3.282)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{A} \partial_x \mathbf{u}^{(1)} &= \sigma_a (\mathbf{b}^{(2)} - \mathbf{u}^{(2)}) + \frac{1}{2} \sigma_a (v^{(0)})^2 (\mathbf{b}^{(0)} - \mathbf{u}^{(0)}) \\ &- \sigma_a v^{(0)} (\mathbf{b}^{(1)} - \mathbf{u}^{(1)}) - \sigma_a v^{(1)} (\mathbf{b}^{(0)} - \mathbf{u}^{(0)}). \end{aligned} \quad (3.283)$$

Les termes en $\mathcal{O}(1)$ des équations d'Euler s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \partial_t \rho_0^{(0)} + \partial_x (\rho_0^{(0)} v^{(0)}) = 0, \\ \partial_t (\rho_0^{(0)} v^{(0)}) + \partial_x \left(\rho_0^{(0)} (v^{(0)})^2 + p^{(0)} + \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{A} \mathbf{b}^{(0)})_1 \right) = 0, \\ \partial_t (\rho_0^{(0)} e^{(0)} + B_0^{(0)}) + \partial_x (\rho_0^{(0)} e^{(0)} v^{(0)} + p^{(0)} v^{(0)} + (\mathbf{A} \mathbf{u}^{(1)})_0) = 0. \end{cases} \quad (3.284)$$

Pour obtenir le résultat escompté, il suffit de calculer les trois quantités $(\mathbf{Ab}^{(0)})_1$, $B_0^{(0)}$, $(\mathbf{Au}^{(1)})_0$. Pour cela, on développe en puissance de ε le vecteur \mathbf{b} :

$$\begin{aligned} B_n &= T^4 \sum_{k=0}^N \omega_k \frac{\bar{P}_n(\lambda_k)}{\gamma^4 \left(1 - \lambda_k \frac{v}{\bar{c}}\right)^4} \\ &= (T^{(0)})^4 \sum_{k=0}^N \omega_k \bar{P}_n(\lambda_k) \\ &\quad + 4\epsilon (T^{(0)})^4 \left[\sum_{k=0}^N \lambda_k \omega_k v^{(0)} \bar{P}_n(\lambda_k) + \frac{T^{(1)}}{T^{(0)}} \sum_{k=0}^N \omega_k \bar{P}_n(\lambda_k) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (3.285)$$

pout tout $n \in \{0, \dots, N\}$. On utilise à présent les relations suivantes liant les poids et les points de la quadrature de Gauss-Legendre :

$$\forall n \in \{0, \dots, N\}, \quad \sum_{k=0}^N \omega_k \bar{P}_n(\lambda_k) = \delta_{n,0}, \quad \sum_{k=0}^N \lambda_k \omega_k \bar{P}_n(\lambda_k) = \frac{\delta_{n,1}}{\sqrt{3}}. \quad (3.286)$$

On obtient alors le développement suivant :

$$\forall n \in \{0, \dots, N\}, \quad B_n = \delta_{n,0} (T^{(0)})^4 + 4\epsilon (T^{(0)})^4 \left(\frac{\delta_{n,1}}{\sqrt{3}} v^{(0)} + \delta_{n,0} \frac{T^{(1)}}{T^{(0)}} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.287)$$

On obtient donc :

$$\mathbf{b}^{(0)} = ((T^{(0)})^4, 0, \dots, 0)^t, \quad \mathbf{b}^{(1)} = \left(4T^{(1)}(T^{(0)})^3, \frac{4}{\sqrt{3}} v^{(0)} (T^{(0)})^4, 0, \dots, 0 \right)^t. \quad (3.288)$$

D'où :

$$B_0^{(0)} = (T^{(0)})^4, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{Ab}^{(0)})_1 = \frac{(T^{(0)})^4}{3}. \quad (3.289)$$

Enfin, on a aussi la relation suivante :

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{b}^{(1)} - \frac{1}{\sigma_a} \mathbf{A} \partial_x \mathbf{b}^{(0)}, \quad (3.290)$$

d'où, il vient :

$$(\mathbf{Au}^{(1)})_0 = \frac{4}{3} (T^{(0)})^4 v^{(0)} - \frac{1}{3\sigma_a} \partial_x [(T^{(0)})^4], \quad (3.291)$$

ce qui termine la démonstration. \square

Conclusion

Les objectifs de ces travaux de thèse étaient l'analyse mathématique et numérique d'un modèle réduit, le modèle P_N , pour la simulation numérique de problèmes de transport de photons. Ces travaux sont motivés par la volonté d'obtenir des solutions de références pour de tels problèmes avec des temps de calcul raisonnables. Pour cette raison, notre étude s'est focalisée sur des problèmes à symétrie sphérique, qui sont rencontrés, par exemple, lorsque l'on cherche à simuler des expériences de fusion par confinement inertiel. La symétrie sphérique des problèmes induit des termes sources géométriques dans les modèles étudiés. La discrétisation précise et robuste de tels termes est délicate.

Après quelques rappels de modélisation en transfert radiatif, nous avons présenté, dans le deuxième chapitre, notre étude mathématique des modèles P_N en géométrie 1D sphérique ainsi qu'une nouvelle discrétisation de ces modèles. L'analyse mathématique des modèles P_N a montré que ceux-ci possèdent des propriétés mathématiques satisfaisantes : en plus d'être arbitrairement précis sur la variable angulaire, ces modèles conservent la densité d'énergie radiative, disposent d'une structure entropique caractérisant la stabilité des solutions en norme L^2 et dégénèrent correctement vers l'équation de la chaleur en régime diffusion. Ces propriétés sont satisfaites dès que le nombre d'harmoniques sphériques est supérieur à 2 ($N \geq 1$). Par ailleurs, on a également montré que les solutions du modèle P_N ne satisfont pas le principe du maximum contrairement à celles du modèle de transport initial. Dans le cas N impair, on a montré que le modèle P_N se réécrit sous une forme conservative à l'aide des états stationnaires. Cette forme conservative est commode pour plusieurs raisons. Premièrement, elle permet de démontrer que le système est strictement hyperbolique. Deuxièmement, elle permet de construire de manière naturelle une discrétisation bien équilibrée, c'est-à-dire qui capture exactement les états stationnaires du système, indépendamment de la finesse du maillage. Nous nous sommes inspirés de récents travaux [DB15] qui proposent une méthode systématique de construction de schémas bien équilibrés pour les systèmes de Friedrichs avec relaxation linéaire. Même si le modèle P_N ne rentre pas dans ce cadre, nous avons montré que la méthode de discrétisation s'applique, en particulier même quand la matrice de relaxation n'est pas symétrique positive et dépend de la variable d'espace. De plus, on a montré que cette discrétisation possède les propriétés suivantes : (1) conservation de la densité d'énergie, (2) préservation des états d'équilibre du modèle, (3) stabilité en norme L^2 et (4) préservation de l'asymptotique diffusion (démontrée en P_1 , observée en P_N). À notre connaissance, aucune méthode numérique pour la simulation de problème de transport

en géométrie $1D$ sphérique concentre à la fois ces 4 propriétés. Enfin, les résultats numériques illustrent l'apport de ces propriétés. En particulier, notre méthode ne génère pas de « flux dip » en $r = 0$, qui est un défaut bien identifié des autres méthodes déterministes existantes en géométrie sphérique (voir [Lat00], [Mac07]). Nous nous sommes enfin intéressés à l'étude du couplage entre rayonnement et matière au repos. On a considéré un couplage à trois températures (ions, électrons, rayonnement) avec prise en compte de la dimension spectrale via une méthode multigroupe. La difficulté d'un tel couplage réside dans sa non linéarité. Nous avons adopté une discrétisation par séparation d'opérateurs (*splitting*) en scindant la partie linéaire de la partie non linéaire. La partie linéaire se résout avec le schéma décrit précédemment, pour chaque groupe de fréquence. Le couplage non linéaire est discrétisé de façon implicite en temps et locale en espace. Sa résolution se fait alors en utilisant un algorithme itératif dont on montre que chaque itérée respecte un principe du maximum au niveau discret. La méthode a été implémentée et testée avec succès.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse aux modèles d'hydrodynamique radiative, et plus spécifiquement aux modèles dits « mixed-frame ». Partant du constat qu'il n'y a pas de consensus dans la littérature sur le modèle à adopter pour le couplage d'un fluide à un rayonnement, en particulier sur la forme des effets d'entraînement matière (effet Doppler et effet d'aberration), nous restreignons notre étude au cas $1D$ plan. En préliminaire indispensable à toute discrétisation, notre objectif ici est d'établir une hiérarchie de modèles. On a classé les différents modèles selon qu'ils satisfont ou non les propriétés suivantes : (1) conservation de l'énergie, (2) conservation de la quantité de mouvement, (3) respect de la limite de diffusion et (4) existence d'une entropie mathématique compatible avec les termes sources. En particulier, ce dernier point a fait l'objet d'une analyse fine et s'est avéré être déterminant dans la comparaison des modèles. Cette étude nous a permis de discuter quant à l'intérêt des modèles relativistes par rapport aux modèles newtoniens. On s'est tout d'abord intéressé aux modèles newtoniens. L'analyse mathématique du modèle de transport, *i.e.* sans approximation angulaire, a permis d'identifier un défaut dans la structure entropique, que ce soit en spectral ou en gris. Comme précisé dans [BD04], ce problème survient lorsqu'on couple le système d'Euler non relativiste et l'équation de transport des photons avec les termes sources relativistes. Pour pallier ce défaut, on a proposé un modèle corrigé où l'on a modifié légèrement les expressions des termes sources tout en restant exact à $\mathcal{O}(v^2/c^2)$ près. Soulignons que cette modification n'est pas effectuée dans [BD04]. On a ensuite étudié les modèles non relativistes basés sur l'approximation P_1 dans le référentiel fixe du laboratoire. On a montré qu'en partant d'un modèle de transport satisfaisant une loi d'entropie, l'approximation P_1 brise cette structure entropique. Cependant, en choisissant les expressions des termes sources de manière adéquate, on est capable de construire un modèle P_1 , dans le cadre de la mécanique newtonienne, satisfaisant à une loi d'entropie. Les corrections effectuées sur les termes sources restent de l'ordre $\mathcal{O}(v^2/c^2)$. On a ensuite proposé une extension pour l'approximation P_N satisfaisant aussi à une loi d'entropie. Enfin, on a montré que ce modèle P_N newtonien respecte bien la limite de diffusion, en accord avec des modèles

issus de la littérature. Dans un second temps, on a étudié des modèles dans le cadre de la relativité restreinte. On a montré que, pour le modèle de transport sans approximation angulaire (spectral ou gris), le problème d'entropie soulevé pour le modèle newtonien disparaît. Le modèle relativiste satisfait à une loi d'entropie sans qu'il soit nécessaire de corriger les termes sources. Ce résultat montre en particulier l'intérêt de se placer dans le contexte de la relativité restreinte pour modéliser finement les termes de couplage rayonnement/matière (effets Doppler et d'aberration). On a ensuite étudié des modèles relativistes basés sur l'approximation P_1 dans le repère fixe du laboratoire. Ici, de même que dans le cadre newtonien, l'approximation P_1 brise la structure entropique du modèle de transport sans approximation angulaire. En corrigeant les expressions des termes sources d'une manière similaire dans le cas newtonien, on a construit un modèle P_1 relativiste satisfaisant à une loi d'entropie. Ce modèle est ensuite étendu pour l'approximation P_N tout en conservant sa structure entropique. Ce dernier modèle est intéressant puisqu'il permet de restituer exactement les effets comobiles (Doppler et aberration) lorsqu'on fait tendre le nombre d'harmoniques vers l'infini. Il s'agit là d'un avantage du modèle P_N relativiste par rapport au modèle P_N newtonien car ce dernier est limité à une précision en $\mathcal{O}(v^2/c^2)$ pour les termes de couplage rayonnement/matière, quel que soit le nombre d'harmoniques N utilisées. On a ensuite montré que ce modèle P_N relativiste respecte bien la bonne limite diffusion. L'analyse mathématique de plusieurs modèles d'hydrodynamique radiative nous a finalement permis d'isoler deux modèles basés sur l'approximation P_N . Le premier est le modèle P_N newtonien qui est présenté dans la section (3.2.5). Le second est le modèle P_N relativiste qui est présenté dans la section (3.3.6). Ces deux modèles possèdent toutes les propriétés mathématiques requises (conservation de l'énergie et de l'impulsion et existence d'une entropie mathématique compatible avec les termes sources) et respectent bien la limite de diffusion admise dans la littérature. Ces deux modèles diffèrent cependant dans leur degré de précision en v/c pour les termes de couplage rayonnement/matière. À notre connaissance, l'étude de la structure entropique des modèles P_N d'hydrodynamique radiative, ainsi que les modifications opérées sur les termes sources constituent une contribution nouvelle.

On projette par la suite d'effectuer l'analyse numérique de ces deux modèles d'hydrodynamique radiative, en s'inspirant du schéma proposé dans cette thèse pour la résolution du transfert radiatif, en vue de quantifier l'influence des effets relativistes sur différents problèmes physiques en configuration $1D$ sphérique. L'étude approfondie de problèmes à géométrie $1D$ sphérique effectuée dans cette thèse est une étape préliminaire nécessaire à l'étude de la configuration $2D$ axisymétrique. À plus long terme, on peut alors envisager une extension aux configurations $2D$ axisymétrique et $3D$ sur maillages cartésiens. Enfin, l'étude des scatterings Thomson et Compton dans le cadre des modèles P_N est également un axe de développement envisagé. Dans le cas du scattering Thomson, les photons ne subissent aucun changement de fréquence lors de leur interaction avec la matière (scattering cohérent). En revanche, la redistribution angulaire des photons n'est plus isotrope mais obéit à une loi quadratique sur la variable angulaire. Dans le cadre des modèles P_N , cette modification n'impacte que très peu les équations du modèle ; seuls quelques

termes supplémentaires viennent s'ajouter. Le scattering Compton, lui, est moins aisé à prendre en compte, même dans un contexte P_N . En effet, dans ce cas, les interactions des photons avec la matière impliquent un changement de fréquence et de direction des photons (scattering non cohérent et non isotrope). L'extension de la méthode numérique développée dans cette thèse au cas du scattering Compton est donc une perspective de travail de plus grande envergure.

Bibliographie

- [BBGS12] Claude Bardos, Etienne Bernard, François Golse, and Rémi Sentis. The diffusion approximation for the linear boltzmann equation with vanishing absorption. 2012.
- [BD04] Christophe Buet and Bruno Despres. Asymptotic analysis of fluid models for the coupling of radiation and hydrodynamics. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 85(3):385–418, 2004.
- [Bru00] Thomas A. Brunner. *Riemann solvers for time-dependent transport based on the maximum entropy and spherical harmonics closures*. PhD thesis, University of Michigan, 2000.
- [Bru02] Thomas A. Brunner. Forms of approximate radiation transport. *SAND2002-1778, Sandia National Laboratory*, 2002.
- [Cas04] John I. Castor. *Radiation hydrodynamics*. Cambridge University Press, 2004.
- [Cha60] Subrahmanyan Chandrasekhar. *Radiative transfer*. Dover Publications, New York, 1960.
- [DB15] Bruno Després and Christophe Buet. The structure of well-balanced schemes for Friedrichs systems with linear relaxation. *Applied Mathematics and Computation*, 2015.
- [Deb67] Roger B Debar. Difference equations for the Legendre polynomial representation of the transport equation. *Journal of Computational Physics*, 2(2):197–205, 1967.
- [FLLS08] Brian D. Farris, Tsz Ka Li, Yuk Tung Liu, and Stuart L. Shapiro. Relativistic radiation magnetohydrodynamics in dynamical spacetimes: Numerical methods and tests. *Physical Review D.*, 78(2):024023, 2008.
- [GR96] Edwige Godlewski and Pierre-Arnaud Raviart. *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, volume 118. Springer, 1996.
- [GT02] Laurent Gosse and Giuseppe Toscani. An asymptotic-preserving well-balanced scheme for the hyperbolic heat equations. *Comptes Rendus Mathématique*, 334(4):337–342, 2002.
- [JL96] Shi Jin and C David Levermore. Numerical schemes for hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms. *Journal of computational physics*, 126(2):449–467, 1996.

- [Lat00] KD Lathrop. A comparison of angular difference schemes for one-dimensional spherical geometry S_N equations. *Nuclear Science and Engineering*, 134(3):239–264, 2000.
- [Lev84] Charles D. Levermore. Relating Eddington factors to flux limiters. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 31(2):149–160, 1984.
- [LM01] Robert B. Lowrie and Jim E. Morel. Issues with high-resolution Godunov methods for radiation hydrodynamics. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 69(4):475–489, 2001.
- [LMH99] Robert B. Lowrie, Jim E. Morel, and Jeffrey A. Hittinger. The coupling of radiation and hydrodynamics. *The astrophysical journal*, 521(1):432, 1999.
- [LP81] Charles D. Levermore and Gerald C. Pomraning. A flux-limited diffusion theory. *The Astrophysical Journal*, 248:321–334, 1981.
- [Mac07] Eric Machorro. Discontinuous Galerkin finite element method applied to the 1-d spherical neutron transport equation. *Journal of Computational Physics*, 223(1):67–81, 2007.
- [Mar47] R. E. Marshak. Note on the spherical harmonic method as applied to the milne problem for a sphere. *Physical Review*, 71(7):443, 1947.
- [MM03] José Maria Martí and Ewald Müller. Numerical hydrodynamics in special relativity. *Living Reviews in Relativity*, 6, 2003.
- [MW86] Alain Munier and Robert Weaver. Radiation transfer in the fluid frame: A covariant formulation: Part i: Radiation hydrodynamics. *Computer Physics Reports*, 3(3):127–164, 1986.
- [MWM99] Dimitri Mihalas and Barbara Weibel-Mihalas. *Foundations of radiation hydrodynamics*. Dover Publications, 1999.
- [RL70] Wm H Reed and KD Lathrop. Truncation error analysis of finite difference approximations to the transport equation. *Nuclear Science and Engineering*, 41(2):237–248, 1970.
- [RSUR13] Daniel Ruiz, Laurie Stephey, Todd Urbatsch, and Scott Runnels. Using high-fidelity radiation transport methods to supplement the diffusion approximation at material interfaces. Technical report, Los Alamos National Laboratory (LANL), 2013.
- [RW67] R. D. Ritchmyer and Morton K. W. *Difference methods for initial-value problems*. Interscience Publishers, 2nd edition, 1967.
- [SS10] Michael D. Sekora and James M. Stone. A hybrid Godunov method for radiation hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 229(19):6819–6852, 2010.
- [TOS⁺13] Hiroyuki R. Takahashi, Ken Ohsuga, Yuichiro Sekiguchi, Tsuyoshi Inoue, and Kengo Tomida. Explicit-implicit scheme for relativistic radiation hydrodynamics. *The Astrophysical Journal*, 764(2):122, 2013.

- [Wis07] Brian D. Wissman. Global solutions to the ultra-relativistic Euler equations. *arXiv preprint arXiv:0705.1333*, 2007.
- [WM91] WF Walters and JE Morel. Investigation of linear-discontinuous angular differencing for the 1-d spherical-geometry S_N equations. Technical report, Los Alamos National Lab., NM (USA), 1991.